論　説

(日本数学会雑誌「数学」2009 年 4 月号論説)

有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数

角　大輝

1　序論

一般に集合 M と写像 $f : M \to M$ に対し, 初期値 $x_0 \in M$ を取った後, 漸化式 $x_{n+1} = f(x_n)$ で決まる点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の振る舞いを調べたり, 写像族 $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ただし f^n は f の n 回合成のこと) の M への作用の仕方を見る分野を **(離散) 力学系**という. また, 上記において M が複素多様体で $f : M \to M$ が正則写像のときには, **複素力学系**という. (離散) 力学系, 複素力学系は純粋数学において多様な必要性から扱われ, また数学以外の様々な分野で数理モデルとして現れる. 具体例として, ゾウムシなど, 一年に一回しか卵を産まない昆虫のある地域での個体数を考える. 第 n 年度の個体数の, 限界個体数に対する割合を x_n $(0 \le x_n \le 1)$ としたとき, x_n らは, 次の漸化式

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n),\ \text{ただし } a \text{ は } n \text{ によらない正定数} \tag{1.1}$$

を満たす, とするモデルがある ([35]). このとき, 区間 $M = [0, 1]$ 上の 2 次多項式 $f(x) = ax(1 - x)$ の力学系が現れている. このモデルを数学的に深く解析する場合は, 初期値 x_0 の取る範囲を複素平面 $\mathbb{C}$, さらにはリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ にまで拡張する. そうすると, リーマン球面上の多項式写像による複素力学系を考えることになる. なお, リーマン球面上の 1 つの 2 次多項式による複素力学系に限っても, 解析は難しく, タイヒミュラー空間論の応用・発展によるものなど, 非常に豊かで深い理論が多くの研究者によってもたらされていることに注意しておきたい (通常の複素力学系の入門については [37], さらに進んでは [36] などがある).

さて, 上記の生物の個体数の数理モデルにおいて, 生物によっては毎年の天候や環境などの変化に対応するべく, 子孫を残す戦略として複数の異なる選択 (写像) $f_1, \dots, f_m$ を持っていることも考えられ, その場合は, 各 n ごとに, x_n を x_{n+1} にうつす写像を f_j らの中からある確率分布に従って選ぶ, というモデルが考えられる. 以上のように, ランダムな多項式力学系を考えることは自然であると思われる. 本稿では, 最初に挙げた通常の複素力学系を一般化して, 複素多様体 M 上の正則写像のある族で生成された写像の合成を積とする半群の M への作用とランダムな複素力学系を考察し, 通常の複素力学系では起こりえない, 正則写像半群の力学系とランダムな複素力学系に特有の興味深い現象とその背景などを述べる.

以下では上記の M は連結複素一次元とする. この場合, M に完備双曲計量が入ると (つまり正則な被覆写像を持つ普遍被覆が単位円板だと) その上の正則写像は双曲計量に関し広義縮小的で, 以下に述べる ‘ジュリア集合’ が空集合になってしまうので, M として面白いのは主にリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ か, 複素

平面 $\mathbb{C}$ の場合である．この稿では, M がリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の場合を扱う．

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダムな多項式力学系を考えた場合, '初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ から出発して無限遠点 ∞ に収束する確率' を $T_\infty(z)$ とかくと, T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の関数を定めるが, 本稿ではこの関数 T_∞ が, ある状況下では**悪魔の階段** (カントール関数ともいう)([69]) や**ルベーグの特異関数** ([69]) などの連続であるがある種の特異性を持つ関数の複素平面上版とでもいうべきものになることを述べ, その微分 (不) 可能性などをエルゴード理論, ポテンシャル論, 複素解析などを用いて論じる (9,10 節, 図 5,6)．また, それらに関連して**高木関数** ([68]) の複素平面上版が現れることも述べる (10 節, 図 7)．

ここで悪魔の階段 (カントール関数), ルベーグの特異関数, 高木関数が何であったか思い出しておこう．実直線 $\mathbb{R}$ 上において, $f_1(x) := 3x,\ f_2(x) := 3(x-1)+1\ (x \in \mathbb{R})$ とおき, $\mathbb{R}$ 上にて, 毎回, f_1 を確率 $1/2$ で, f_2 を確率 $1/2$ で選択するランダムな力学系を考える．実直線 $\mathbb{R}$ に 2 つの無限遠点 $\pm\infty$ を付け加えてコンパクト化する．このとき '初期値 $x \in \mathbb{R}$ から出発して $+\infty$ に収束する確率' を $T_{+\infty}(x)$ とおくと, $T_{+\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の関数を定めるが, この $T_{+\infty}$ を $[0,1]$ 上に制限したものが, 悪魔の階段あるいはカントール関数といわれているものになる (図 1)．悪魔の階段は

- $[0,1]$ 上で連続.
- カントールの三進集合 (ある種のフラクタル集合) の上だけで変化する.
- 広義単調である.

という性質を持つ．同様にして, 今度は $g_1(x) := 2x,\ g_2(x) := 2(x-1)+1\ (x \in \mathbb{R})$ とおいて, $0 < a < 1$ に対し, $\mathbb{R}$ 上において, 毎回 g_1 を確率 a で, g_2 を確率 $1-a$ で選択するランダムな力学系を考え, '初期値 $x \in \mathbb{R}$ から出発して $+\infty$ に収束する確率' を $T_{+\infty,a}(x)$ とかくと, 関数 $T_{+\infty,a}$ を $[0,1]$ に制限したものが 'ルベーグの特異関数 L_a' として知られているものになる (図 1)．ルベーグの特異関数 L_a は $[0,1]$ 上で連続で単調であり, $a \neq 1/2$ のとき L_a はルベーグ測度に関してほとんど全ての点 $x \in [0,1]$ で微分が可能でその微係数は 0 である, という特異性を持つ．さらに, 関口-塩田の研究によって $x \in [0,1]$ を固定するごとに, パラメータ a の関数 $a \mapsto L_a(x)$ は $(0,1)$ 上で実解析的であることが知られており ([41]), そして (それより以前の) 畑-山口の研究によって $[0,1]$ 上の関数 $x \mapsto (1/2)\cdot(\partial L_a(x)/\partial a)|_{a=1/2}$ は高木関数と一致することが知られている ([27], 図 1)．つまり, 悪魔の階段やルベーグの特異関数は '$+\infty$ に収束する確率の関数' という $\mathbb{R}$ 上のランダムな力学系の言葉によって定義することが可能であり, そして高木関数は '$+\infty$ に収束する確率の関数の確率パラメータによる偏微分', とみなせるのである．なお, 悪魔の階段, ルベーグの特異関数, 高木関数は, 一般的には 'ある種の関数方程式と境界条件を満たす $[0,1]$ 上の有界関数' として定義されている ([19, 69, 1])．それを述べると (以下の定義は [19, 69, 1] のそれと見た目は少し違うが同値である), 悪魔の階段は,

$$\frac{1}{2}\varphi(3x) + \frac{1}{2}\varphi(3x-2) = \varphi(x)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \varphi|_{(-\infty,0]} \equiv 0,\ \varphi|_{[1,+\infty)} \equiv 1, \tag{1.2}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上のただ一つの有界関数 φ を $[0,1]$ に制限したもの, と定義され, ルベーグの特異関数 L_a は,

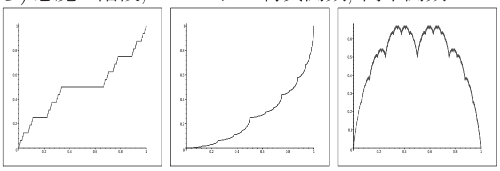
$$a\varphi(2x) + (1-a)\varphi(2x-1) = \varphi(x)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \varphi|_{(-\infty,0]} \equiv 0,\ \varphi|_{[1,+\infty)} \equiv 1, \tag{1.3}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上のただ一つの有界関数 φ を ψ_a と書いたときの ψ_a を $[0,1]$ に制限したもの, と定義され, そして高木関数は

$$\frac{1}{2}\varphi(2x)+\frac{1}{2}\varphi(2x-1)+\psi_{1/2}(2x)-\psi_{1/2}(2x-1)=\varphi(x)\ (\forall x\in\mathbb{R}),\ \varphi|_{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)}\equiv 0 \tag{1.4}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上のただ一つの有界関数 φ を ϕ と書いたときの $\phi/2$ を $[0,1]$ に制限したもの, と定義される．なお, 上記の $\mathbb{R}$ 上の '特異関数' らとその一般化したものの族については非常に古くから多くの興味深い研究がなされ, 現在も活発に調べられている ([68, 19, 27, 41, 69, 1] など参照).

図 1：(左から) 悪魔の階段, ルベーグの特異関数, 高木関数



話を戻して, さきに導入した各関数 $T_{+\infty}$, $T_{+\infty,a}$ が $\mathbb{R}$ 上有界で, それぞれ (1.2), (1.3) を満たすことは簡単に確かめられる．これらの特異関数については, これまで, ランダムな力学系の視点から自然にとらえられることを暗に使うことがあっても, その視点によって統一的に調べたり, ランダムな力学系を前面に押し出す, ということはほとんどなかったように思われるので注意しておく．本稿で述べたいことの１つは, ランダムな複素力学系によってこれら特異関数の複素平面上版が考えられる, ということである．複素平面上で定義されたそれらの関数は, 複素平面上で連続で, かつ '複数の有理写像によって生成された半群のジュリア集合' の上だけで変化する.

上記に出てきたランダムな複素力学系や, 関連する, 正則写像のある族で生成された半群の力学系を研究するための (筆者が良いと思う) 戦略は, 以下の項目:

- 正則写像の半群の力学系 (作用)
- 正則写像の半群である種の性質を持つもの, を全て集めたものの空間
- 反復写像系 (Iterated Function System) とその一般化
- (後方) 自己相似集合とその一般化, フラクタル幾何学
- (後方) 自己相似集合を形作る異なる写像たちの絡み具合をホモロジー代数で表現すること
- ランダムな複素力学系 (ある種のマルコフ過程)
- 写像の半群の生成系に付随する歪積の力学系, 写像の列ごとの作用
- ファイバー有理写像（後述）の力学系

を同時に考察することである．これにより上記のすべての項目の研究が同時に１ステップ進む．以下の節では, これらの項目が互いに関連しあって大きな流れになっていく様を述べたい．なお, 上記の項目の研究については, 一つの有理写像の反復合成（以下通常の複素力学系とよぶ）の結果が一般化される場合と, 新しい現象が生まれる場合がある.

謝辞: 査読者の方々に多くの有益なコメントをいただきましたことを, 深く感謝いたします.

2　有理半群

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の非定数有理写像のある族で生成された, 写像の合成を積とする半群を**有理半群**という．有理半群の力学系の研究は, 1990 年代はじめに, A. Hinkkanen と G. J. Martin([28]) が一次分数変換の

離散群のモジュライ空間が複素一次元になる場合にそのパラメータ付けを行うという目的で, また中国の F. Ren のグループ ([70, 23]) がランダムな複素力学系を調べるという目的で, それぞれ導入したのが初めてであった. (なお, 筆者はそれら 2 つのグループとは独立に, 有理半群の力学系が研究対象になりうることに気づいて, その研究に着手した.) 以下, $\hat{\mathbb{C}}$ には球面距離を入れる.

定義 1　G を有理半群とするとき,

$$F(G) := \{\, z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ があり } \{g : U \to \hat{\mathbb{C}}\}_{g \in G} \text{は } U \text{ 上で同程度連続である} \,\}$$

とおき G の**ファトウ集合**という. また $J(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$ とおいて, G の**ジュリア集合**という.

注意 2　G がクライン群 (一次分数変換の離散群) のときには, ジュリア集合 $J(G)$ は G の**極限集合**と呼ばれているものに一致する.

定義 3　一般に半群 G が $\{h_1, h_2, \ldots\}$ で生成されているとき, $G = \langle h_1, h_2, \ldots \rangle$ とかく. 有理写像 g について, $F(g) := F(\langle g \rangle)$, $J(g) := J(\langle g \rangle)$ とおく.

定義 4　有理半群 G について, $E(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \sharp(\bigcup_{g \in G} g^{-1}(\{z\})) < \infty\}$ とおき, G の**例外集合**とよぶ。

次に, 有理半群 G のジュリア集合, ファトウ集合の基本的性質について述べる.

補題 5 ([28, 70, 23])　G を有理半群とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $F(G)$ は開集合で $J(G)$ はコンパクト.

(2) 任意の $g \in G$ に対し, $g(F(G)) \subset F(G)$, $g^{-1}(J(G)) \subset J(G)$. しかし, 等号は一般に成り立たない. (例: $G = \langle z^2, 2z \rangle$ のとき、$F(G) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}, J(G) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$.)

(3) $\sharp(J(G)) \ge 3$ ならば, $J(G)$ は孤立点を持たないコンパクト集合, よって完全集合である.

(4) $\sharp(J(G)) \ge 3$ ならば, $\sharp(E(G)) \le 2$ である.

(5) $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus E(G)$ ならば, $J(G) \subset \overline{\bigcup_{g \in G} g^{-1}(\{z\})}$ である.　よって $z \in J(G) \setminus E(G)$ ならば, $\overline{\bigcup_{g \in G} g^{-1}(\{z\})} = J(G)$ である.

(6) $\sharp(J(G)) \ge 3$ ならば, $J(G)$ は ‘任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}(K) \subset K$ となるコンパクト集合 $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ で $\sharp K \ge 3$ なるもの’ のうち包含関係に関して最小である.

(7) G が群あるいは可換半群ならば、任意の $g \in G$ に対し、$F(G), J(G)$ は完全不変 (つまり、$g(F(G)) = g^{-1}(F(G)) = F(G), g(J(G)) = g^{-1}(J(G)) = J(G)$) となる.

注意 6　有理半群 G に対して, H が G の部分半群ならば, $J(H) \subset J(G)$ である. また $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が有理写像で $\deg(g) \ge 2$ ならば $\sharp(J(g)) \ge 3$ となることが知られている ([37]) ので, よって, 次数 2 以上の元を含む有理半群 G は必ず $\sharp(J(G)) \ge 3$ を満たす.

補題 5 の中において注意したように, G が反復合成のような可換半群や群でない場合は, ‘任意の $g \in G$ について $g(F(G)) = F(G)$, $g(J(G)) = J(G)$’ が成り立つとは限らない. しかし $J(G)$ は次の**後方自己相似性**を持つ。

補題 7 ([52])　有理半群 G が有限生成で, $G = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ のとき, 次が成り立つ:

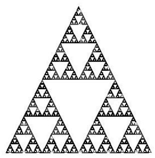
$$J(G) = h_1^{-1}(J(G)) \cup \cdots \cup h_m^{-1}(J(G)).$$

補題 7 より, $\mathbb{C}$ 上の有限個の相似縮小変換で作られた**自己相似集合** ([20, 69]) はある有理半群のジュリア集合とみなせる. また, 有理半群のジュリア集合の研究は後方自己相似性を通じてフラクタル幾

何学 ([20, 69]) と関係する．

例 8　$p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ とし，この 3 点は正三角形をなすとする．$h_j(z) = 2(z - p_j) + p_j, j = 1, 2, 3$ とおく．$G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ とおくと，$J(G)$ はシルピンスキーガスケット ([69], 図 2) になる．

図 2：シルピンスキーガスケット



次の定理は非常に基本的で，応用が広い．

定理 9 ([28, 70, 23])　(有限生成とは限らない) 有理半群 G が $\sharp(J(G)) \geq 3$ を満たすとき，

$$J(G) = \overline{\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists g \in G, g(z) = z, |g'(z)| > 1\}} = \overline{\bigcup_{g \in G} J(g)}.$$

さて，有理関数の反復合成による従来の複素力学系においては，D. Sullivan によるタイヒミュラー空間論の応用と発展により，'遊走領域' がない，という特筆すべき現象が知られている ([51])．これを有理半群の場合に考えてみる．

定義 10　G を有理半群とし，U を $F(G)$ の連結成分とする．任意の $g \in G$ に対し，U_g で，$g(U)$ を含む $F(G)$ の連結成分を表す．U が**遊走領域**であるとは，$\sharp\{U_g \mid g \in G\} = \infty$ のときをいう．

注意 11　[28] において，遊走領域を持つ無限生成多項式半群が発見され，有理半群が 'ほとんど可換' という条件を満たせば遊走領域を持たないことが示された．また [28] におけるほとんど可換な多項式半群についての予想の一つが原田により [25] において肯定的に解決された．

次の予想は未解決である．

予想 12 ([28])　次数 2 以上の元を含む有限生成有理半群は，遊走領域をもたない．

有理半群においては，タイヒミュラー空間論を用いても，ファトウ集合上の力学系に関する必要な情報が得られないことがある．これも，ファトウ集合が各元によって完全不変であるとは限らないことに起因している．たとえば，有理半群 G について，$\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合 K で，'G の各元で完全不変であり，かつ 3 点を含む' ようなもののうち，最小のものを $CI(G)$ と書いて**完全不変ジュリア集合**という ([45, 46]) が，R. Stankewitz は [45] において 'f, g が次数 2 以上の多項式で，$J(f) \neq J(g)$ ならば，$CI(\langle f, g \rangle) = \hat{\mathbb{C}}$ となる' という結果を示した．次の（筆者による）予想 13 はこの結果に基づく．まず、リーマン面 S の上の可測 $(-1, 1)$ 形式 $\mu = \mu(z)(d\bar{z}/dz)$ を S 上のベルトラミ微分といい $\|\mu\|_\infty$ を μ の L^∞ ノルムとする。タイヒミュラー空間論ではこのベルトラミ微分（の同値類）の空間を扱う．

予想 13 ([59])　f, g が次数 2 以上の多項式で $J(f) \neq J(g)$ ならば，$\hat{\mathbb{C}}$ 上のベルトラミ微分 μ で f, g の両方で不変かつ $\|\mu\|_\infty < 1$ となるものは 0 に限る．(注：そのような μ 全体は [26, 45] により有限次元である．)

後の 5 節において半双曲性を仮定すると遊走領域がないことが従うことを紹介する．有理半群の力学系は通常の複素力学系と '一般化多項式類似写像' を通じて関係することもある (片方，[33])．また

[48] では [28] の予想のいくつかに反例が与えられ修正された予想が提出された．有理半群の参考文献としては上記のほか [29, 30, 6, 7, 40, 67, 39] と筆者の論文などがある．また Stankewitz とその学生 (W. Conatser, T. Butz, Y. Li, K. Hart) による有理半群のジュリア集合を描くためのコンピュータプログラムが http://www.bsu.edu/web/rstankewitz/JuliaHelp2.0/Julia.html にある．

3　ファイバー有理写像の力学系

ランダムな複素力学系や, 有理半群の力学系を詳しく調べるために, この節では, M. Jonsson([32]) によって導入されたファイバー有理写像の力学系を導入する．なお, ランダムな複素力学系や有理半群の力学系への応用には, 自明束の上の力学系で十分であるが, 本稿では一般の $\hat{\mathbb{C}}$-束の上の力学系も考えておく (そのような力学系は, 高次元の複素力学系で現れるので応用がある).

定義 14 ([32])　本稿では次の全てを満たす 3 つ組 (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束ということにする:

(1) Y, X はいずれもコンパクト距離空間.

(2) $\pi : Y \to X$ は連続で上への写像.

(3) X のある開被覆 $\{U_i\}$ があり, 任意の i について, ある同相写像 $\Phi_i : U_i \times \hat{\mathbb{C}} \to \pi^{-1}(U_i)$ で次を満たすものがある：　$\Phi_i(\{x\} \times \hat{\mathbb{C}}) = \pi^{-1}(\{x\})$ かつ任意の $x \in U_i \cap U_j$ に対して $\{x\} \times \hat{\mathbb{C}} \cong \hat{\mathbb{C}}$ の同一視のもと $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : \{x\} \times \hat{\mathbb{C}} \to \{x\} \times \hat{\mathbb{C}}$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の正則自己同形を与える.

注意 15　(π, Y, X) が $\hat{\mathbb{C}}$-束のとき, 任意の $x \in X$ に対し, ファイバー $\pi^{-1}(\{x\})$ を Y_x とかくことにする．上記の $\hat{\mathbb{C}}$-束の定義から, 各ファイバー Y_x は複素構造を持つ．さらに, Φ_i を用いて, 与えられた $x_0 \in X$ に対し, x_0 に近い各 x に対して, 同相写像の連続な族 $i_x : \hat{\mathbb{C}} \to Y_x$ を考えることができる．このような $\{i_x\}$ を局所パラメータ付けと呼んでおく．X はコンパクトと仮定しているので, $\hat{\mathbb{C}}$ の正則自己同形全体 $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ のコンパクトな族 M_0 があって任意の局所パラメータ付け $\{i_x\}, \{j_x\}$ について $j_x^{-1} \circ i_x \in M_0$ となるとしてよい.

本稿では $\hat{\mathbb{C}}$-束 (π, Y, X) について以下のことも必ず仮定する:

• 任意の $x \in X$ に対し, ファイバー Y_x にはあるなめらかな正 $(1,1)$ 形式 ω_x があってそれが誘導する Y_x 上の距離は Y から誘導される相対距離と一致する．また, $x \mapsto \omega_x$ は連続. つまり, もし $\{i_x\}$ が局所パラメータ付けであるとすると, $x \mapsto i_x^* \omega_x$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $(1,1)$ 形式全体の C^∞ 位相に関し連続.

定義 16　$(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明な $\hat{\mathbb{C}}$-束とするとき, $\pi_{\hat{\mathbb{C}}} : Y \to \hat{\mathbb{C}}$ を標準的な射影とする．また, 自明な $\hat{\mathbb{C}}$-束というときには ω_x は全て $\pi_{\hat{\mathbb{C}}}$ による Y_x と $\hat{\mathbb{C}}$ の同一視のもと $\hat{\mathbb{C}}$ の球面計量 (Fubini-Study 計量) と等しいということにする.

定義 17 ([32])　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y, g : X \to X$ をそれぞれ連続写像とする．$f : Y \to Y$ が $g : X \to X$ 上の**ファイバー有理写像**であるとは '$\pi \circ f = g \circ \pi$ かつ任意の $x \in X$ に対し, $f|_{Y_x} : Y_x \cong \hat{\mathbb{C}} \to Y_{g(x)} \cong \hat{\mathbb{C}}$ が非定数有理写像である' ときをいう.

定義 18　上記において (π, Y, X) が自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束のときには $f : Y \to Y$ は**有理歪積** (rational skew product) という.

定義 19　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ が $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像であるとする．このとき, 任意の $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f_x^n = f^n|_{Y_x} : Y_x \to Y_{g^n(x)}$ とおく．さらに, $f_x := f_x^1$ とおく．また, $d_n(x) := \deg(f_x^n)$, $d(x) := \deg(f_x)$ とおく.

注意 20　ファイバー有理写像の定義から, $x \mapsto d(x) \in \mathbb{N}$ は連続である.

定義 21 $(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の有理歪積とする. 任意の $x \in X, n \in \mathbb{N}$ に対し, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理写像 $f_{x,n}$ を, $f_{x,n}(y) := \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(f^n(x, y))$ で定義する. また, 任意の $x \in X$ において $f_{x,1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が多項式写像であるときには, $f : Y \to Y$ は**多項式歪積**という.

定義 22 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の非定数有理写像全体のなす空間を Rat とかき, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束によって誘導される位相を入れる. また, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の 2 次以上の多項式写像全体を $\mathcal{Y}$ とかき, Rat からの誘導位相を入れる. (注意: Rat は可算個の連結成分を持つ. その各連結成分は Rat の開集合であり, 有限次元複素多様体である ($\mathcal{Y}$ についても同様). また、$\mathcal{Y}$ において '$h_n \to h$' は, 十分大きな全ての n において $\deg(h_n) = \deg(h)$ であって, かつ h_n の各次数の項の係数が h の対応する次数の項の係数に収束することと同値.)

定義 23 Γ を Rat の空でないコンパクトな部分集合とする. $\Gamma^{\mathbb{N}} := \{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \mid \gamma_j \in \Gamma\}$ とおく. $\mathrm{Rat}^{\mathbb{N}}$ を同様に定義してそれに積位相を入れ, $\Gamma^{\mathbb{N}}$ に $\mathrm{Rat}^{\mathbb{N}}$ からの誘導位相を入れる. これによって $\Gamma^{\mathbb{N}}$ はコンパクト距離空間である. 写像 $\sigma : \Gamma^{\mathbb{N}} \to \Gamma^{\mathbb{N}}$ を $\sigma(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) := (\gamma_2, \gamma_3, \ldots)$ で定義し, これを**シフト写像**という. さらに, 写像 $f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を, $(\gamma, y) \mapsto (\sigma(\gamma), \gamma_1(y))$ で定義する. ただし, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ である. $f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ は $\sigma : \Gamma^{\mathbb{N}} \to \Gamma^{\mathbb{N}}$ 上の有理歪積である. $f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を**有理写像のコンパクトな族 Γ に付随する有理歪積**という.

定義 24 $m \in \mathbb{N}$ に対し, $\Sigma_m := \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ とおいて, これに $\{1, \ldots, m\}$ の離散位相の直積位相を入れる (Σ_m はコンパクト距離空間になる). $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ をシフト写像, つまり $\sigma(w_1, w_2, \ldots,) = (w_2, w_3, \ldots)$ とする. $f = (f_1, \ldots, f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ に対し, $\tilde{f} : \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}} \to \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ を, $(w, y) \mapsto (\sigma(w), f_{w_1}(y))$ で定義する. ただし $w = (w_1, w_2, \ldots) \in \Sigma_m$ である. $\tilde{f} : \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}} \to \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ はシフト写像 $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ 上の有理歪積である. この $\tilde{f}$ を, **多価写像 $f = (f_1, \ldots, f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ に付随する有理歪積**という.

定義 25 (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像であるとする. また, $x \in X$ とする. このとき, Y_x の部分集合 $F^x(f)$ を, 次を満たす $y \in Y_x$ の集合とする: '$\{f_x^n : Y_x \to Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ が y の Y_x におけるある近傍で同程度連続である'. $F^x(f)$ を f の x における**ファイバーファトウ集合**という. また, $J^x(f) := Y_x \setminus F^x(f)$ とおいて, これを f の x における**ファイバージュリア集合**という. さらに, $\tilde{J}(f) := \overline{\bigcup_{x \in X} J^x(f)}$ とおく. ここで閉包は Y でとる. そして $\tilde{F}(f) := Y \setminus \tilde{J}(f)$ とおく. また, 任意の $x \in X$ に対して, $\hat{J}^x(f) := \tilde{J}(f) \cap Y_x$ とおく.

補題 26 ([32, 58]) (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の $x \in X$ について, $F^x(f)$ は Y_x の開部分集合であり, $J^x(f), \hat{J}^x(f)$ は Y_x のコンパクト部分集合である.

(2) 任意の $x \in X$ について, $f_x^{-1}(J^{g(x)}(f)) = J^x(f)$ かつ $\hat{J}^x(f) \supset J^x(f)$. よって $f(\tilde{J}(f)) \subset \tilde{J}(f)$ となる. しかし一般に $\hat{J}^x(f) = J^x(f)$ は成り立たない.

(3) もしさらに $g : X \to X$ が開写像ならば, $f^{-1}(\tilde{J}(f)) = \tilde{J}(f)$, $f(\tilde{F}(f)) \subset \tilde{F}(f)$ となる.

(4) もしさらに $g : X \to X$ が全射開写像ならば, $f^{-1}(\tilde{J}(f)) = \tilde{J}(f) = f(\tilde{J}(f))$ かつ $f^{-1}(\tilde{F}(f)) = \tilde{F}(f) = f(\tilde{F}(f))$ となり, また, 任意の $x \in X$ について $f_x^{-1}(\hat{J}^{g(x)}(f)) = \hat{J}^x(f)$ となる.

定義 27 $(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の有理歪積とする. このとき任意の $x \in X$ について $F_x(f) := \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(F^x(f))$, $J_x(f) := \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(J^x(f))$, $\hat{J}_x(f) := \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(\hat{J}^x(f))$ とおく. f が $\Gamma \subset \mathrm{Rat}$ に付随する有理歪積のときは $J_x(f)$ を x の**ジュリア集合**という.

補題 28 ([63])　Γ を Rat の空でないコンパクト部分集合, $f:\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}\to\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}$ を Γ に付随する有理歪積, G を Γ で生成された有理半群とし, $\sharp J(G)\geq 3$ と仮定する．このとき (1)$\pi_{\hat{\mathbb{C}}}(\tilde{J}(f))=J(G)$ かつ (2) 任意の $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\ldots)\in\Gamma^{\mathbb{N}}$ に対し $\hat{J}_\gamma(f)=\bigcap_{j=1}^{\infty}\gamma_1^{-1}\cdots\gamma_j^{-1}(J(G))$.

注意 29　$\tilde{J}(f)$ の定義で $\bigcup_{x\in X}J^x(f)$ の Y での閉包をとっているが, 閉包を取る理由は, Y の部分集合である $\bigcup_{x\in X}J^x(f)$ が一般にはコンパクトではないことにある．例えば, ある点 z_1 を中心とするジーゲル円盤を持つ 2 次以上の多項式写像 h_1 と, その点 z_1 を反発固定点として持つ 2 次以上の多項式写像 h_2 を取り, $\Gamma=\{h_1,h_2\}$ とおく．そして $f:\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}\to\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}$ を Γ に付随する有理歪積とする．そして, $x=(h_1,h_1,h_1,\ldots)\in\Gamma^{\mathbb{N}}$ とおく．このとき, $(x,z_1)\in\hat{J}^x(f)\setminus J^x(f)$ であることがわかる．特に, $\bigcup_{x\in X}J^x(f)$ はコンパクトではない．このことが, ファイバー有理写像の力学系を考える際の多くの困難を引き起こす．よってこのことはランダムな複素力学系や有理半群の力学系の一つの難しさを産むことにもなる．

さて, (π,Y,X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束, $f:Y\to Y$ を $g:X\to X$ 上のファイバー有理写像とし, 任意の $x\in X$ に対して $d(x)\geq 2$ となっている場合を考えよう．この場合に, M. Jonsson の多重ポテンシャル論を用いた議論 ([32]) とその若干の一般化 ([55]) により, 任意の $x\in X$ についてファイバージュリア集合 $J^x(f)$ と台が一致するような標準的なボレル確率測度 μ^x を以下のように構成することができる：
まず, $x\in X$ を固定し, $x_n=g^n(x)$ とおく．x,x_1 のまわりの局所パラメータ付け i_x,i_{x_1} をとって, $Q_x:=i_{x_1}^{-1}\circ f_x\circ i_x$ とおく．これを $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上の $d(x)$ 次の同次多項式写像 R_x で $\sup\{|R_x(z,w)|:|(z,w)|=1\}=1$ を満たすものに持ち上げる．$x_1,x_2,\ldots$ のそれぞれの点でも x と同様に局所パラメータ付け $i_{x_1},i_{x_2},\ldots,$ を取って $R_{x_1},R_{x_2},\ldots$ を作る．そして $R_x^n=R_{x_{n-1}}\circ\cdots\circ R_x$ とおく．さて, 各 n に対し, $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上のなめらかな多重劣調和関数 $G_{x_n,0}$ を ω_{x_n} のポテンシャルであるように, つまり標準的射影 $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{CP}^1=\hat{\mathbb{C}}$ の任意の局所正則切断 $s:V\subset\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{CP}^1\to\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ に対して $\omega_{x_n}=dd^c(G_{x_n,0}\circ s\circ i_{x_n}^{-1})$ が成り立ち, かつ $G_{x_n,0}(z,w)\leq\log|(z,w)|+O(1)$ as $|(z,w)|\to\infty$, $G_{x_n,0}(\lambda z,\lambda w)=G_{x_n,0}(z,w)+\log|\lambda|$ $(\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ が成り立つようにとる．そして, $G_{x,n}:=(1/d_n(x))\cdot G_{x_n,0}\circ R_x^n$ とおく．これは $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上の多重劣調和関数である．$n\to\infty$ とすると, $G_{x,n}$ は $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上のある連続多重劣調和関数 G_x に収束し, かつ G_x は各 x_n のまわりの局所パラメータ付け i_{x_n} や $G_{x_n,0}$ や R_{x_n} の取り方によらないことが分かる．さらに $x\mapsto G_x$ が連続であることもわかる．そして, Y_x 上のボレル確率測度 μ^x で, 任意の局所正則切断 $s:V\subset\hat{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ に対して $\mu^x=dd^c(G_x\circ s\circ i_x^{-1})$ が成り立つものが取れることがわかる．この手続きで作った $\{\mu^x\}_{x\in X}$ を調べることによって, 次がわかる．これと後述の定理 32,35 は通常の複素力学系における H. Brolin, M. Lyubich, Freire-Lopes-Mañé, Fornaess-Sibony らの研究の一般化である．

命題 30 (**[32, 55, 58]**)　(π,Y,X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f:Y\to Y$ を $g:X\to X$ 上のファイバー有理写像とする．また, 任意の $x\in X$ について, $d(x)\geq 2$ とする．このとき, 上のように作った Y_x 上のボレル確率測度 μ^x とファイバージュリア集合 $J^x(f)$ について, 次が成り立つ．

(1) 任意の $x\in X$ について, $\mathrm{supp}\ \mu^x=J^x(f)$.

(2) 任意の $x\in X$ について μ^x を Y のボレル確率測度と思ったとき, $x\mapsto\mu^x$ は, Y 上のボレル確率測度の空間の弱位相に関し, 連続である．

(3) 任意の $x\in X$ について, $J^x(f)$ は空でなく, 孤立点を持たないコンパクト集合となる．特に, $J^x(f)$ は非可算個の点を含む．

(4) $J^x(f)$ を Y のコンパクト部分集合と思ったとき, $x \mapsto J^x(f)$ は下半連続である. つまり, 任意の $x \in X, y \in J^x(f)$ と x に収束する X の任意の点列 $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, Y のある点列 $\{y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $y^n \in J^{x^n}(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $y^n \to y$ $(n \to \infty)$ を満たすものがある.

注意 31 上記のように '任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$' のときには $x \mapsto J^x(f)$ は下半連続なのだが, その条件下でも, 一般に $x \mapsto J^x(f)$ は Y の空でないコンパクト部分集合全体の空間のハウスドルフ位相に関して連続ではない. 実際, 上記の条件下でも $\bigcup_{x\in X} J^x(f)$ が Y のコンパクト部分集合にならない場合, 例えば, 注意 29 のなかであげた例, の場合には, '任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$' だが $x \mapsto J^x(f)$ は連続ではない. 注意 29 で述べたことと同じだが, このことが, 通常の複素力学系と異なる, ファイバー有理写像の力学系, ランダムな複素力学系, 有理半群の力学系の 1 つの難しさである.

さて, コンパクト距離空間 Y 上の連続写像 f について, f の '位相的エントロピー' は f-不変ボレル確率測度全体のなかでの '測度論的エントロピー' の上限に等しい, という**変分原理**といわれる結果がある. 力学系の問題のなかに, 位相的エントロピーの決定や, 測度論的エントロピーを最大にする不変確率測度の存在と一意性, がある. この問題に関して, 以下の結果がある. まず, いくつか用語を設定する. 一般に, コンパクト距離空間 Y 上の連続写像 f について, $h(f)$ で, $f : Y \to Y$ の**位相的エントロピー**を表す. また, Y 上のボレル確率測度 ν が f-不変のとき, $h_\nu(f)$ で組 (f, ν) の**測度論的エントロピー**を表す. 上記の設定でさらに, コンパクト距離空間 X, その上の連続写像 g, 連続写像 $\pi : Y \to X$ があって, $g \circ \pi = \pi \circ f$ が成り立つとき, $h_\nu(f|g)$ で, (f, ν) の $g : X \to X$ に関する**測度論的相対エントロピー**を表す. また, (π, Y, X) が $\hat{\mathbb{C}}$-束, $f : Y \to Y$ が $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像で '任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$' となるとき, X の g-不変ボレル確率測度 μ' に対して, Y 上のボレル確率測度 μ を,

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_X \left(\int_{Y_x} \varphi \ d\mu^x \right) \ d\mu', \tag{3.1}$$

ただし φ は Y 上の任意の連続関数で, μ^x は命題 30 の前のところで作ったもの, という式で決める. このとき, μ は f-不変となり $\pi_*(\mu) = \mu'$ となる. 以上の用語のもと, M. Jonsson は次を示した.

定理 32 ([32]) (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする. また, '2 以上のある自然数 d があって, 任意の $x \in X$ について $d(x) = d$' が成り立っているとする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $h(f) = h(g) + \log d$.

(2) Y 上の任意の f-不変ボレル確率測度 ν に対して, $h_\nu(f|g) \leq \log d$.

(3) X 上の g-不変ボレル確率測度 μ' に対し, 式 (3.1) のように μ をつくる. すると, $h_\mu(f|g) = \log d$, $h_\mu(f) = h_{\mu'}(g) + \log d$ となる. また,
(a)μ' が $g : X \to X$ についてエルゴード的ならば μ は $f : Y \to Y$ についてエルゴード的で,
(b)μ' が $g : X \to X$ について混合的ならば μ は $f : Y \to Y$ について混合的であり,
(c)μ' が $g : X \to X$ の最大エントロピー測度 (測度論的エントロピーが最大で位相的エントロピーに等しくなるような測度) ならば, μ は $f : Y \to Y$ の最大エントロピー測度になる.

(4) X 上の g-不変ボレル確率測度 μ' に対し, 式 (3.1) のように μ をつくる. また, ν を Y 上の f-不変ボレル確率測度で $\pi_*(\nu) = \mu'$ となるものとする. このとき, $h_\nu(f|g) = \log d$ ならば, $\nu = \mu$ となる.

(5) X 上の g-不変ボレル確率測度 μ' に対し, 式 (3.1) のように μ をつくる．もし μ' が $g : X \to X$ に対する唯一の最大エントロピー測度であるとすると, μ は $f : Y \to Y$ に対する唯一の最大エントロピー測度になる．

なお, 定理 32 をランダムな複素力学系や有理半群の力学系に応用しようとしたときは, '2 以上のある自然数 d があって任意の $x \in X$ について $d(x) = d$' という条件は除きたくなる．その条件を除いた上での結果を紹介しておく．

補題 33 ([59])　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする．このとき, 以下が成り立つ．

(1) Y 上の f-不変ボレル確率測度 μ に対して, $h_\mu(f|g) \le \int_X \log d(x)\ d(\pi_*(\mu))(x)$.

(2) '任意の $x \in X$ について $d(x) \ge 2$' を仮定する．X 上の g-不変ボレル確率測度 μ' に対して, 式 (3.1) のように Y 上の f-不変ボレル確率測度 μ をつくる．すると, 定理 32-(3) の (a),(b) が成り立つ．さらに, 次の等式が成立する:

$$h_\mu(f|g) = \sup_\nu h_\nu(f|g) = \int_X \log d(x)\ d\mu'(x), \tag{3.2}$$

ここで sup は Y 上の f-不変ボレル確率測度 ν で $\pi_*(\nu) = \mu'$ を満たすもの全体のなかでとる．

上記の補題の仮定のもとで式 (3.2) の sup の値を実現する確率測度 ν の一意性が成り立つと著者は予想しているが, それはまだ示されていない ([32] の議論は一般化できない)．この予想を述べておく:

予想 34　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする．また, 任意の $x \in X$ について, $d(x) \ge 2$ とする．X 上の g-不変ボレル確率測度 μ' に対して, 式 (3.1) のように μ をつくる．このとき式 (3.2) の sup の値を実現する ν は μ に限る．

なお, Γ を Rat の有限集合とし, $f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を Γ に付随する有理歪積とすると, 予想 34 は適当な仮定の下で正しい．より正確に, 以下に述べる結果がある．なお, 下記の定理で出てくる確率測度 ρ^a は 10 節のランダムな多項式力学系の無限遠点に収束する確率の関数 T_∞ (悪魔の階段やルベーグの特異関数の複素平面上版) の微分 (不) 可能性に関する結果で再び現れる．定理を述べるために, いくつか用語を設定する．まず, $m \in \mathbb{N}$ とし, 多価写像 $f = (f_1, \dots, f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ に付随する有理歪積 $\tilde{f} : \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}} \to \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ を考え, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ で $\sum_{j=1}^m a_j = 1, a_j > 0 (\forall j)$ を満たすものを '重み' といい, それらの集合を $\mathcal{W}$ と表す．K を $\Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合で, $\tilde{f}^{-1}(K) \subset K$ が成り立つものとする．$C(K)$ で K 上の連続複素数値関数全体を表し, これに sup ノルム $\|\cdot\|_K$ を入れておく．任意の $a \in \mathcal{W}$ に対し, $C(K)$ 上の作用素 $B_a : C(K) \to C(K)$ を, $B_a\varphi(z) = \sum_{\zeta \in \tilde{f}^{-1}(z)} \varphi(\zeta)\psi_a(\zeta)$ で決める．ただし, $\psi_a : \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ は, '$\pi(\zeta) = (w_1, w_2, \dots) \in \Sigma_m$ のとき $\psi_a(\zeta) = a_{w_1} / \deg(f_{w_1})$' で定義する関数である．以上の用語のもとで, 次の結果を述べる．

定理 35 ([54])　$m \in \mathbb{N}$ とし, 多価写像 $f = (f_1, \dots, f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ を与える ($\deg(f_j)$ は j によって異なっていてもよく, $\deg(f_k) = 1$ となる k があってもよい)．f に付随する有理歪積 $\tilde{f} : \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}} \to \Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ をとり, $G = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ とおく．G は 2 次以上の元を含むとし, $E(G) \subset F(G)$ となるとする．また, $H := \{h^{-1} \mid h \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G\}$ とおいて, $F(H) \supset J(G)$ を仮定する ($H = \emptyset$ のときには $F(H) = \hat{\mathbb{C}}$ とおく)．このとき, 以下が成り立つ．

(1) 任意の重み $a \in \mathcal{W}$ に対し, $\Sigma_m \times \hat{\mathbb{C}}$ のあるボレル確率測度 ρ^a で, 次を満たすものが一意に存在

する: K を, $\tilde{f}^{-1}(K)\subset K$ が成り立つような $\Sigma_m\times(\hat{\mathbb{C}}\setminus E(G))$ の任意の空でないコンパクト部分集合とすると, 任意の $\varphi\in C(K)$ に対して $\|B_a^n\varphi-\left(\int_K\varphi\,d\rho^a\right)\cdot\mathbf{1}\|_K\to 0\ (n\to\infty)$ が成り立つ. ただし, $\mathbf{1}$ は値 1 の定数関数を表す.

(2) B_a を $C(\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}})$ 上の作用素と考えたとき, $B_a^*\rho^a=\rho^a$ となる. また, ρ^a は $\tilde{f}$-不変である. さらに, $\pi_*(\rho^a)$ は Σ_m の重み a に対応したベルヌイ測度 τ_a と等しい.

(3) ρ^a の台は $\tilde{J}(\tilde{f})$ と等しい.

(4) $(\tilde{f},\rho^a)$ は完全 (exact) である. よってとくに, ρ^a は $\tilde{f}$ に関してエルゴード的である.

(5) $\tilde{a}=\left(\deg(f_1)/\sum_{j=1}^m\deg(f_j),\ldots,\deg(f_m)/\sum_{j=1}^m\deg(f_j)\right)\in\mathcal{W}$ とおく. このとき, $h(\tilde{f})=h_{\rho^{\tilde{a}}}(\tilde{f})=\log(\sum_{j=1}^m\deg(f_j))$ となり, また $\rho^{\tilde{a}}$ は $\tilde{f}:\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}\to\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}$ の唯一の最大エントロピー測度である. とくに, $\tilde{f}$ の最大エントロピー測度 $\rho^{\tilde{a}}$ を π_* で写すと, 重み $\tilde{a}$ に対応する Σ_m のベルヌイ測度となる. (よって, $\deg(f_j)$ が j によって異なるときは, この定理の $\tilde{f}:\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}\to\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}$ に対して定理 32-(3) の (c) の主張は成り立たない.)

(6) $a\in\mathcal{W}$ とすると, $h_{\rho^a}(\tilde{f}|\sigma)=\sup_\rho h_\rho(\tilde{f}|\sigma)=\sum_{j=1}^m a_j\log(\deg(f_j))$ となる. ここで sup は $\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\tilde{f}$-不変ボレル確率測度 ρ で $\pi_*(\rho)=\tau_a$ を満たすもの全ての中でとる.

(7) $a\in\mathcal{W}$ とし, $\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\tilde{f}$-不変エルゴード的ボレル確率測度 ρ が $\pi_*(\rho)=\tau_a$ かつ $h_\rho(\tilde{f}|\sigma)=\sum_{j=1}^m a_j\log(\deg(f_j))$ を満たすならば, $\rho=\rho^a$ となる.

注意 36　定理 35 の仮定のもとでさらに ‘任意の $j=1,\ldots,m$ について $\deg(f_j)\geq 2$’ を仮定すると $E(G)\subset F(G)$ となり、さらに以下が成り立つ。

(1) 定理 35(7) の主張のなかの ‘エルゴード的’ という部分を除くことができる. (注：このことは [54] には載せていないが, [32] の Lemma 6.4 の議論と上の (7) の主張を組み合わせれば示せる.)

(2) 任意の重み a に対応する Σ_m のベルヌイ測度 τ_a に対し, $\mu'=\tau_a$ とおいて式 (3.1) のように $Y=\Sigma_m\times\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\tilde{f}$-不変ボレル確率測度 μ をつくると, μ は ρ^a と一致する. (注：このことは [54] に載せていないが, 上記の (7) の主張と補題 33 からただちに示せる.)

注意 37　定理 32 と定理 35 はほぼ同時期に得られたが, 証明の手法は異なる. ファイバー有理写像の力学系の研究では, このほか [31] や O. Sester による [42, 43] も重要である.

4　ジュリア集合の一様完全性と内点の有無

複素解析やポテンシャル論においてコンパクト集合の ‘一様完全性’ という性質が議論されることがある. ここではファイバー有理写像のファイバージュリア集合や有理半群のジュリア集合の一様完全性に関する結果を述べ, それを応用して, 一般の有理半群においては ‘ジュリア集合が $\hat{\mathbb{C}}$ でなくかつ内点を持つ’ という, クライン群や通常の複素力学系では現れない現象があることを紹介する. まず, 一様完全性の定義を述べる.

定義 38 ([34])　A を $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域とする. $\hat{\mathbb{C}}\setminus A$ が二つの連結成分からなるとき, A を**二重連結領域**という. A が二重連結領域で $\sharp(\hat{\mathbb{C}}\setminus A)\geq 3$ のとき, A はある円環 $\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<r\}$ (ただし r は $1<r\leq\infty$) と正則同値であり, $M(A):=(1/2\pi)\cdot\log r$ とおく. $\sharp(\hat{\mathbb{C}}\setminus A)=2$ のとき $M(A):=\infty$ とおく. $M(A)$ を A の**モジュラス**という. また, 二重連結領域 A と $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 K について, A が K を**分離**するとは, $\hat{\mathbb{C}}\setminus A$ の二つの連結成分が, いずれも K と交わるときをいう.

定義 39 ([50])　K を $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合とし, $\sharp K\geq 2$ とする. また, C を正数とする. K が

***C*- 一様完全**であるとは, 次のときをいう: '任意の二重連結領域 A で K を分離するようなものについて, 必ず $M(A) \leq C$ となる'. また, ある C について K が C-一様完全のとき, K は**一様完全**であるという.

Hinkkanen と Martin は [29] においてジュリア集合の内点の有無と一様完全性は関係があることを以下のように示した.

記号: 位相空間 Y の部分集合 J について, $\mathrm{int}(J)$ で J の内点の集合を表す.

定理 40　G を有理半群とする. $a \in J(G)$ とし, ある $g \in G$ によって $g(a) = a, g'(a) = 0$ となるとする. もし $J(G)$ が一様完全であるならば, $a \in \mathrm{int}(J(G))$ となる.

実際, Stankewitz が以下の定理に示したように, 多くの有理半群のジュリア集合が一様完全になる.

定理 41 ([47])　Γ を Rat の空でない相対コンパクトな集合とし, G を Γ で生成された有理半群とする. このとき, $J(G)$ は一様完全である.

注意 42　定理 40 と定理 41 から, 有理半群 G で, '$J(G) \neq \hat{\mathbb{C}}$ かつ $\mathrm{int}(J(G)) \neq \emptyset$' を満たすものの例を数多く作ることができる. なお, [29] においては, 無限生成有理半群 G で $J(G)$ が一様完全でないものがあることが示されている.

ジュリア集合の一様完全性と内点の有無に関しては, 3 節の命題 30 (多重ポテンシャル論の応用) を用いて, 以下のことを示すこともできる.

定理 43 ([58])　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f: Y \to Y$ を $g: X \to X$ 上のファイバー有理写像とする. また, 任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$ であると仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(1)　ある定数 $C_1 > 0$ があり, 任意の $x \in X$ について, $J^x(f)$ と $\hat{J}^x(f)$ は C_1-一様完全である.

(2)　ある定数 $C_2 > 0$ があり, 任意の $x \in X$ について $\mathrm{diam} J_x > C_2$.　ここで, diam とは, 距離空間 Y における直径を表す.

Rat の 2 次以上の元からなる Rat のコンパクト部分集合 Γ に付随する有理歪積に定理 43-(1)(2) を適用し, そこにさらに定理 9 を組み合わせると, 次の結果を得ることができる.

定理 44 ([58])　Γ を Rat の空でないコンパクト集合とし, Γ の任意の元の次数は 2 以上とする. G を Γ で生成された有理半群とする. このとき, ある正定数 C があって, G の任意の部分半群 H について, $J(H)$ は C-一様完全である.

5　双曲性と半双曲性

一般に多様体上の滑らかな写像による力学系を研究する際, '双曲性' とよばれる良い性質を仮定したり, さらにはいつその双曲性が成り立つか, ということを考えることが多い. ここでは有理半群とファイバー有理写像について, 双曲性とそれを少し弱めた半双曲性, 劣双曲性を定義し, その性質を調べる. 特に, 半双曲性を持つファイバー有理写像 $f: Y \to Y$ については $\bigcup_{x \in X} J^x(f)$ が Y のコンパクト部分集合になる (注意：半双曲性を仮定しないと一般には成り立たない), という非常に応用の広い結果が得られることを紹介する. この結果を有理半群の力学系における様々な研究対象, たとえばジュリア集合のハウスドルフ次元の評価などに応用することができる.

定義 45　有理半群 G に対し $P(G) := \overline{\bigcup_{g \in G} \{g: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{の臨界値}\}}$ $(\subset \hat{\mathbb{C}})$ とおき, G の**臨界値集合 (postcritical set)** という.

注意 46　G が Rat の空でない部分集合 Γ で生成されているとき,

$P(G)=\overline{\bigcup_{g\in G\cup\{Id\}} g(\bigcup_{h\in\Gamma}\{h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}\text{の臨界値}\})}$ となる．このことから, $P(G)$ の様子をさぐることができる．また, 任意の $g\in G$ に対し $g(P(G))\subset P(G)$ となる．

定義 47　G を有理半群とする．

(1) $P(G)\subset F(G)$ となっているとき, G は**双曲的 (hyperbolic)** であるという．

(2) $P(G)\cap F(G)$ がコンパクトでかつ $\sharp(P(G)\cap J(G))<\infty$ のとき, G は**劣双曲的**であるという．

定義 48　G を有理半群とし, $N\in\mathbb{N}$ とする．

(1) $SH_N(G)$ で, 次を満たす点 $z\in\hat{\mathbb{C}}$ の集合とする：'z のある近傍 U があって, 任意の $g\in G$ と $g^{-1}(U)$ の任意の連結成分 V に対し, $\deg(g:V\to U)\leq N$ となる．ただしここで deg は有限分岐被覆 $g:V\to U$ の次数を表す.'

(2) $UH(G):=\hat{\mathbb{C}}\setminus\bigcup_{N\in\mathbb{N}} SH_N(G)$ とおく．$UH(G)\subset F(G)$ のとき (つまりある $N\in\mathbb{N}$ によって $J(G)\subset SH_N(G)$ のとき), G は**半双曲的**であるという．

注意 49　有理半群 G が双曲的ならば, G は劣双曲的かつ半双曲的である．

次にファイバー有理写像について双曲性と半双曲性を定義する．

記号: $x\in\hat{\mathbb{C}}, r>0$ に対し, $B(x,r):=\{z\in\hat{\mathbb{C}}\mid d(x,z)<r\}$ とおく．ただしここで d は球面距離.

定義 50　(π,Y,X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f:Y\to Y$ を $g:X\to X$ 上のファイバー有理写像とする．

(1) $C(f):=\bigcup_{x\in X}\{y\in Y_x\mid f_x'(y)=0\}(\subset Y)$ とおいて f の**ファイバー臨界点集合**という．

(2) $P(f):=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(C(f))}$ $(\subset Y)$ とおいて f の**ファイバー臨界値軌道集合**という．

(3) $P(f)\subset\tilde{F}(f)$ のとき, f は **(ファイバーに沿って) 双曲的**という．

(4) 任意の $z\in Y$ と $n\in\mathbb{N}$ に対し, $(f^n)'(z)$ で, $f^n_{\pi(z)}:Y_{\pi(z)}\to Y_{g^n(\pi(z))}$ の z における微分を表す．また, $Y_{\pi(z)}$ の $\omega_{\pi(z)}$ に対応するリーマン計量と $Y_{g^n(\pi(z))}$ の $\omega_{g^n(\pi(z))}$ に対応するリーマン計量について微分 $(f^n)'(z)$ のノルムを計ったものを, $\|(f^n)'(z)\|$ とかくことにする．

(5) $\tilde{J}(f)\neq\emptyset$ かつある定数 $C>0$ と定数 $\lambda>1$ があって, $\inf_{z\in\tilde{J}(f)}\|(f^n)'(z)\|\geq C\lambda^n$ となるとき, f は **(ファイバーに沿って) 拡大的**であるという．

(6) $N\in\mathbb{N}$ のとき, $SH_N(f)$ で, 次を満たす点 $z\in Y$ の全体とする: 'ある正数 δ と $\pi(z)$ の X におけるある近傍 U と, U におけるある局所パラメータ付け $\{i_x\}_{x\in U}$ があり, 任意の $x\in U$, $n\in\mathbb{N}$, $x^n\in g^{-n}(\{x\})$ と $f_{x^n}^{-1}(i_x(B(i_{\pi(z)}^{-1}(z),\delta)))$ の任意の連結成分 V に対し,

$$\deg(f_{x^n}:V\to i_x(B(i_{\pi(z)}^{-1}(z),\delta)))\leq N$$

となる.'

(7) $UH(f):=Y\setminus\bigcup_{N\in\mathbb{N}} SH_N(f)$ とおく．$UH(f)\subset\tilde{F}(f)$ のとき (つまりある $N\in\mathbb{N}$ によって $\tilde{J}(f)\subset SH_N(f)$ となるとき) , f は **(ファイバーに沿って) 半双曲的**という．

注意 51　f が拡大的ならば, 双曲的である．f が双曲的ならば, 半双曲的である．

注意 52　Γ を Rat の空でないコンパクト部分集合とし, $f:\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}\to\Gamma^{\mathbb{N}}\times\hat{\mathbb{C}}$ を Γ に付随する有理歪積とする．また, G を Γ で生成された有理半群とする．このとき, G が双曲的であることと, f が双曲的であることは同値である．また, G が半双曲的であることと, f が半双曲的であることは同値である．

以下においてまず, 半双曲的有理半群の力学系の結果について述べる．

定理 53 ([55])　G を (コンパクトな写像族で生成されていると仮定しない) 半双曲的有理半群とし,

G は次数 2 以上の元を含むとする．このとき, 任意の $z \in F(G)$ について $\overline{\{g(z) \mid g \in G\}} \subset F(G)$ となる．特に遊走領域はない (上記から $\overline{\{g(z) \mid g \in G\}}$ が $F(G)$ のコンパクト部分集合になるから).

定義 54　G を有理半群とする．このとき,
$A(G) := \overline{\bigcup_{h \in G} h(\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists g \in G, g(z) = z \text{ and } |g'(z)| < 1\})}$ $(\subset \hat{\mathbb{C}})$ とおく．

定理 55 ([55])　$G = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ を有限生成半双曲的有理半群とし, G は次数 2 以上の元を含むとする．また, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G$ の元はないか, あっても全て斜航的であるとする (注： 斜航的とは, 固定点がちょうど 2 つあり, そこでの微分の絶対値が 1 でないこと)．さらに, $F(G) \neq \emptyset$ とする．このとき, $\emptyset \neq A(G) \subset F(G)$ であり, そして $F(G)$ の任意の空でないコンパクト部分集合 L に対して,

$$\sup\{d(h_{i_n} \circ \cdots \circ h_{i_1}(z), A(G)) \mid z \in L, (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n\} \to 0 \ (n \to \infty),$$

ただし d は球面距離, となる．また, もし $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が G の互いに異なる元からなる列で, $F(G)$ のある部分領域 V である $\varphi : V \to \hat{\mathbb{C}}$ に収束したとすると, ある $\zeta \in A(G)$ により $\varphi \equiv \zeta$.

[55] においては有限生成劣双曲的有理半群についても定理 55 と類似の結果が得られている．この節の後半部分において, いつ半双曲性が成り立つのかについて議論する．その前に, ファイバー有理写像の場合の半双曲性に関する結果を紹介しておく．まず, 次の技術的な条件を導入しておく．

定義 56　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $x \in X, r > 0, z \in Y_x$ とする． このとき, $\tilde{B}(z, r) := \{y \in Y_x \mid d_x(y, z) < r\}$ とおく．ここで d_x は距離空間 Y から Y_x に導入される相対距離である．

定義 57　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X :\to X$ 上のファイバー有理写像とする．f が**条件 $(*)$** を満たすとは, 任意の $x_0 \in X$ についてある近傍 U とそこでの位相的円板の族 $\{D_x\}_{x \in U}$ (ただし $D_x \subset Y_x$) があり, 次の全てを満たすときをいう．

(1)　任意の $x \in U$ に対し, ある $z_x \in Y_x$ とある $r_x > 0$ があり, $D_x = \tilde{B}(z_x, r_x)$ となる．
(2)　$\overline{\bigcup_{x \in U} \bigcup_{n \geq 0} f_x^n(D_x)} \subset \tilde{F}(f)$ となる．
(3)　任意の $x \in U$ に対し, $\mathrm{diam}\ (f_x^n(D_x)) \to 0\ (n \to \infty)$ となる．
(4)　$x \mapsto z_x \in Y,\ x \mapsto r_x \in \mathbb{R}$ は U において連続である．

注意 58

(1)　$(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の多項式歪積とする．任意の $x \in X$ について, $d(x) \geq 2$ であると仮定すると, f は条件 $(*)$ を満たす ($\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ のある小円板近傍 D を取って, $D_x = \{x\} \times D$ とおけばよい).

(2)　$G = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ を有限生成半双曲的有理半群とし, G は次数 2 以上の元を含むとする．また, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G$ の元はないか, あっても全て斜航的であるとする．さらに, $F(G) \neq \emptyset$ とする．このとき, $(h_1, \ldots, h_m)$ に付随する有理歪積は, 条件 $(*)$ を満たす．(定理 55 を使う．)

次はファイバーファトウ集合上で非定数極限関数が現れたときに関する重要な結果で, 半双曲的有理半群や 7 節以降の臨界値集合が有界な多項式半群の力学系等への応用が大変に広い．さらに次を用いてファイバー有理写像において半双曲性を仮定したときの $\bigcup_{x \in X} J^x(f)$ のコンパクト性等が示せる．

定理 59 ([55, 58])　(π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする．f は条件 $(*)$ を満たすとする．$z \in Y$ を一つの点とし, $z \in F^{\pi(z)}(f)$ と仮定する．いま自然数の狭義単調増加列 $\{n_j\}$ によって, $j \to \infty$ のとき $f^{n_j}(z)$ はある点 $z_0 \in Y$ に収束するとする．$\pi(z)$ のまわりと $\pi(z_0)$ のまわりでそれぞれ局所パラメータ付け $\{i_x\}$ をとり, U を $i_{\pi(z)}^{-1}(z)$ の $\hat{\mathbb{C}}$ における連結

開近傍とする．また, 上の $\{n_j\}$ によって, $R_j := i_{\pi(f^{n_j}(z))}^{-1} \circ f_{\pi(z)}^{n_j} \circ i_{\pi(z)}$ は $j \to \infty$ のときある非定数写像 $\psi : U \to \hat{\mathbb{C}}$ に U 上一様収束するとする．任意の $1 \le i \le j$ について, $S_{i,j} := f_{g^{n_i}(\pi(z))}^{n_j - n_i}$ とおく．そして,

$$V := \{a \in Y_{\pi(z_0)} \mid \exists \epsilon > 0,\ \lim_{i\to\infty} \sup_{j>i} \sup_{\xi \in \tilde{B}(a,\epsilon)} d(S_{i,j} \circ i_{g^{n_i}(\pi(z))} \circ i_{\pi(z_0)}^{-1}(\xi), \xi) = 0\}$$

ただし d は距離空間 Y の距離, と置く．以上の仮定と記号のもとで, V は $Y_{\pi(z_0)}$ の空でない開部分集合であり, かつ $V \neq Y_{\pi(z_0)}$ であり, さらに

$$\emptyset \neq \partial V \subset \hat{J}^{\pi(z_0)}(f) \cap UH(f) \subset \hat{J}^{\pi(z_0)}(f) \cap P(f)$$

ただし ∂V は $Y_{\pi(z_0)}$ の位相で取ったもの, となる．

定理 59 から半双曲的ファイバー有理写像についての次の結果を得る．まず記号を用意しておく．

記号: 位相空間 Y_1, Y_2 と連続写像 $f : Y_1 \to Y_2$ と, Y_2 の部分集合 Z に対し, $c(Z, f)$ で $f^{-1}(Z)$ の連結成分全体を表す.

定理 60 ([55, 58]) (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の半双曲的ファイバー有理写像とする．また, f は条件 $(*)$ を満たすとする．このとき, 以下の全ての主張が成り立つ.

(1) $\bigcup_{x\in X} J^x(f)$ は Y のコンパクト部分集合であり, $\tilde{J}(f) = \bigcup_{x\in X} J^x(f)$ となる.

(2) ある正定数 δ, L, λ $(0 < \lambda < 1)$ があって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について次が成り立つ:

$$\sup\{\mathrm{diam}\ U \mid U \in c(\tilde{B}(y,\delta), f_{x^n}^n),\ y \in \tilde{J}(f), x^n \in g^{-n}(\{\pi(y)\})\} \le L\lambda^n.$$

(3) 定理の仮定のもとでさらに任意の $x \in X$ について $d(x) \ge 2$ であるとする． このとき, $x \mapsto J^x(f)$ は Y の空でないコンパクト部分集合の空間のハウスドルフ位相に関して連続である.

(4) 定理の仮定のもとでさらに任意の $x \in X$ について $d(x) \ge 2$ であるとする．このとき, $\tilde{F}(f)$ の任意の空でないコンパクト部分集合 K に対して, $\overline{\bigcup_{n\ge 0} f^n(K)} \subset \tilde{F}(f)$ となり, そしてある定数 $C > 0$ と定数 $0 < \tau < 1$ があって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sup_{z\in K} \|(f^n)'(z)\| \le C\tau^n$ となる.

定理 60 を応用して, 双曲的であることと拡大的であることが同値であることを示すことが出来る：

定理 61 ([55]) (π, Y, X) を $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上のファイバー有理写像とする．また, f は条件 $(*)$ を満たすとする．このとき, f が双曲的であることと, 拡大的であることは, 同値である.

定理 60-(2) を応用して, 半双曲的多項式歪積がある条件を満たすとその無限遠点吸引域がジョン領域であることと, ファイバージュリア集合が局所連結であることを示すことができる．このことについて, まず, 記号を導入する.

定義 62 ([38]) V を $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない部分領域とし, $\partial V \subset \mathbb{C}$ とする．c を正の実数とする．V が **c-ジョン領域**であるとは, 次のときをいう：‘ある点 $z_0 \in V$ があり $(\infty \in V$ のときは $z_0 = \infty)$, 任意の点 $z_1 \in V$ について z_1 と z_0 をつなぐある曲線 $\xi \subset V$ があって任意の $z \in \xi$ について
$\min\{|z - a| \ \mid a \in \partial V\} \ge c|z - z_1|$ となる.’ また, ある c によって c-ジョン領域である領域は**ジョン領域**であるという.

注意 63 ([38]) V が $\hat{\mathbb{C}}$ の単連結部分領域で $\partial V \subset \mathbb{C}$ を満たし, ジョン領域であるならば, ∂V は

局所連結である．また, 単純閉曲線である $\xi \subset \mathbb{C}$ について, ξ が擬円 ([34]) であることと $\hat{\mathbb{C}} \setminus \xi$ の 2 つの連結成分がいずれもジョン領域であることは同値である．

定義 64 $(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の多項式歪積とする．このとき, 任意の $x \in X$ について, $A^x(f) := \{y \in Y_x \mid \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(f_x^n(y)) \to \infty \ (n \to \infty)\}$ とおき, また $A_x(f) := \pi_{\hat{\mathbb{C}}}(A^x(f))$ とおく．

注意 65 上で, '任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$' ならば, 任意の $x \in X$ について $A_x(f)$ は ∞ の開近傍であり $A_x(f)$ は ∞ を含む $F_x(f)$ の連結成分と一致する．さらに $\partial(A_x(f)) = J_x(f)$ となる．

以上のもとで, 次の結果を述べる．これは, 多項式の反復合成における半双曲性と ∞ の吸引領域のジョン性の同値性定理 (Carleson-Jones-Yoccoz, [13]) の, 一方向の一般化である．

定理 66 ([58]) $(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の半双曲的多項式歪積とする．任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$ であるとし, また, $\pi_{\hat{\mathbb{C}}}(P(f)) \setminus \{\infty\}$ は $\mathbb{C}$ の有界集合であるとする．このとき, ある正定数 c があり, 任意の $x \in X$ について, $A_x(f)$ は c-ジョン領域となる．特に, 任意の $x \in X$ について, $J_x(f)$ は連結かつ局所連結となる．

筆者は [63] において, 定理 66 を用いて, $\mathcal{Y}$ のコンパクトな族 Γ で生成された (半) 双曲的多項式半群 G で $P(G) \setminus \{\infty\}$ が $\mathbb{C}$ 上有界なものを 3 つのクラスに分類し, そのうちの一つのクラスでは, 'ほとんどすべての $\gamma \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ について, $J_\gamma(f)$ は単純閉曲線だが擬円ではなく, かつ $F_\gamma(f)$ の ∞ を含む連結成分はジョン領域である' という通常の多項式力学系ではありえない現象が起きることを示した (図 3 が一つの例)．これを用いて同様の現象が $\mathbb{C}^2$ 上の公理 A 多項式歪積でも起きることを筆者は示した ([18] に筆者のその例が収録されている)．なお、通常の多項式力学系では、ジュリア集合が単純閉曲線だが擬円でなければ、ファトウ集合の ∞ を含む連結成分はジョン領域でない ([13]).

[55] で示された有限生成有理半群が半双曲性を持つための必要十分条件を用いて (あるいは直接に), 劣双曲的で超吸引的固定点がジュリア集合になければ, 半双曲的であることが示される：

命題 67 ([55]) $G = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ を有限生成劣双曲的有理半群とする．G は次数 2 以上の元を含むとし, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G$ の元はないか, あっても全て斜航的とする．また, $F(G) \neq \emptyset$ とする．さらに, 任意の $g \in G$ と任意の $z \in J(G)$ について, '$g(z) = z$ かつ $g'(z) = 0$' とはならないとする．このとき, G は半双曲的である．

例 68 $G = \langle z^2 + 2, z^2 - 2 \rangle$ とする． このとき, $P(G) = \{\infty, -2, 2\}$ であり, $P(G) \cap J(G) = \{-2, 2\}$ である．よって, G は双曲的でないが劣双曲的である．また, 命題 67 によって, G は半双曲的である．

双曲的有理半群とほぼ同じであるが拡大的有理半群も導入しておく．

定義 69 G を有限生成有理半群とし, Rat の有限集合 Γ で生成されているとする．G が**拡大的**であるとは, Γ に付随する有理歪積が拡大的であるときをいう．

注意 70 (1) 上において, G が拡大的であることは Γ の取り方によらない．(2)G が拡大的であるならば, 双曲的である．(3) 逆に, 次数 2 以上の元を含む有限生成双曲的有理半群 G について, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G$ の元はないか, あっても全て斜航的とすると, G は拡大的である．(注意 58(2) と定理 61 を使う．)

双曲性あるいは拡大性について次を示すことが出来る ([52, 65]).

定義 71 $\mathrm{Exp}(m) := \{(h_1, \ldots, h_m) \in (\mathrm{Rat})^m \mid \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ は拡大的 $\}$ とおく．

補題 72 ([52, 65]) $\mathrm{Exp}(m)$ は $(\mathrm{Rat})^m$ の開集合である．

例 73 $c \in \mathbb{C}, |c| > 2$ ならば, $\langle z^2 + c,\ z^2 - c \rangle$ は双曲的 (よって拡大的) である.

6 ジュリア集合のハウスドルフ次元

この節では, 半双曲的有理半群と拡大的有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について考察する. まずいくつか用語を導入する.

定義 74 G を可算個の元からなる有理半群とする. 任意の $t \geq 0$ と $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し, $S_G(z,t) := \sum_{g \in G} \sum_{g(y)=z} \|g'(y)\|^{-t}$ とおく. ここで和において $g(y) = z$ の根の重複度は数え, $\|\cdot\|$ は球面計量に関する微分のノルム. さらに $S_G(z) := \inf\{t \geq 0 \mid S_G(z,t) < \infty\}$ とおく ($S_G(z,t) < \infty$ となる t がなければ $S_G(z) = \infty$ とおく). さらに $s_0(G) := \inf\{S_G(z) \mid z \in \hat{\mathbb{C}}\}(\in [0,\infty])$ とおく. $S_G(z)$ を ***G* の *z* におけるポアンカレ級数の臨界指数**といい, $s_0(G)$ を ***G* のポアンカレ級数の臨界指数**という.

定義 75 $m \in \mathbb{N}$ に対し, $\Sigma_m^* := \bigcup_{j=1}^{\infty}\{1,\ldots,m\}^j$ (disjoint union) とおく. また,
$f = (f_1,\ldots,f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ と $w = (w_1,\ldots,w_n) \in \Sigma_m^*$ に対し, $f_w := f_{w_n} \circ \cdots \circ f_{w_1}$ とおく.

定義 76 $m \in \mathbb{N},\ f = (f_1,\ldots,f_m) \in (\mathrm{Rat})^m,\ t \geq 0,\ z \in \hat{\mathbb{C}}$ とする. このとき,
$Z_f(z,t) := \sum_{w \in \Sigma_m^*} \sum_{f_w(y)=z} \|f_w'(y)\|^{-t}$ とおく. ただし和において $f_w(y) = z$ の根の重複度は数える. また, $Z_f(z) := \inf\{t \geq 0 \mid Z_f(z,t) < \infty\}$ とおく ($Z_f(z,t) < \infty$ を満たす t がなければ $Z_f(z) = \infty$ とおく). そして, $z_0(f) := \inf\{Z_f(z) \mid z \in \hat{\mathbb{C}}\}(\in [0,\infty])$ とおく. $Z_f(z)$ を ***f* の *z* におけるポアンカレ級数の臨界指数**といい, $z_0(f)$ を ***f* のポアンカレ級数の臨界指数**という.

注意 77 $f = (f_1,\ldots,f_m) \in (\mathrm{Rat})^m, t \geq 0, z \in \hat{\mathbb{C}}$ とし, $G = \langle f_1,\ldots,f_m \rangle$ とする. このとき, $S_G(z,t) \leq Z_f(z,t), S_G(z) \leq Z_f(z), s_0(G) \leq z_0(f)$ となる. また, ルベーグ測度に関してほとんど全ての $f = (f_1,\ldots,f_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ に対して $G = \langle f_1,\ldots,f_m \rangle$ は自由半群であり, そのような f と任意の $t \geq 0,\ z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $S_G(z,t) = Z_f(z,t),\ S_G(z) = Z_f(z), s_0(G) = z_0(f)$ となる.

定義 78 $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 A に対し $\dim_H(A), \underline{\dim}_B(A), \overline{\dim}_B(A)$ でそれぞれ球面距離に関する A のハウスドルフ次元, 下ボックス次元, 上ボックス次元を表す ([20]). (なお, 一般に $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A)$ である.)

定理 60 から, 次を示すことができる.

定理 79 ([55]) G を次数 2 以上の元を含む有限生成半双曲的有理半群とする. $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cap G$ の元はないか, あっても全て斜航的とする. また $F(G) \neq \emptyset$ とする. このとき $\dim_H(J(G)) \leq s_0(G)$.

定義 80 $h = (h_1,\ldots,h_m) \in (\mathrm{Rat})^m$ とし, U を $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない開集合とする. h が U について**開集合条件**を満たすとは, '$\bigcup_{j=1}^{m} h_j^{-1}(U) \subset U$ かつ任意の異なる i,j について $h_i^{-1}(U) \cap h_j^{-1}(U) = \emptyset$' となるときをいう. また, ある U について開集合条件を満たすとき, 単に開集合条件を満たす, という.

以下の定理 81, 83, 84 は 10 節のところで重要な役割を果たす. なお、これらは通常の複素力学系の熱力学形式などによる研究とフラクタル幾何学における自己相似集合の次元の研究の両者の一般化である。

定理 81 ([58]) $h = (h_1,\ldots,h_m) \in (\mathrm{Rat})^m,\ G = \langle h_1,\ldots,h_m \rangle$ とする. G は次数 2 以上の元を含むとし, また, G は半双曲的とする. さらに, ある U によって h は開集合条件を満たすとする. このとき, $J(G) = \overline{U}$ となるか, そうでなければ $\dim_H(J(G)) \leq \overline{\dim}_B(J(G)) < 2$.

定義 82 ([57]) $f = (f_1,\ldots,f_m) \in \mathrm{Exp}(m)$ とする. また, $t \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 写像 $\tilde{f} : \tilde{J}(\tilde{f}) \to \tilde{J}(\tilde{f})$ の, ポテンシャル関数 $\varphi(z) := -t \log \|\tilde{f}'(z)\|$ に関する位相的圧力を $P(t,f)$ で表す. ま

た, $t \mapsto P(t,f)$ の唯一の零点を $v(f)$ で表す (零点の存在と一意性は [57] に示されている).

定理 83 ([57])　$f=(f_1,\dots,f_m)\in \mathrm{Exp}(m), G=\langle f_1,\dots,f_m\rangle$ とする．このとき, 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus(A(G)\cup P(G))$ について, 次が成り立つ：

$$\dim_H(J(G))\le \overline{\dim}_B(J(G))\le s_0(G)\le S_G(z)\le v(f)=Z_f(z)=z_0(f). \tag{6.1}$$

また, $\tilde{J}(\tilde{f})$ 上の連続関数全体 $C(\tilde{J}(\tilde{f}))$ 上の作用素 M を $M\varphi(x)=\sum_{\tilde{f}(y)=x}\|\tilde{f}'(y)\|^{-v(f)}\varphi(y)$ で定義すると, $\tilde{J}(\tilde{f})$ 上のボレル確率測度 ν で $M^*(\nu)=\nu$ を満たすものがただ一つ存在する．さらに定数関数 $\mathbf{1}$ に対して $\alpha:=\lim_{n\to\infty}M^n\mathbf{1}\in C(\tilde{J}(\tilde{f}))$ が存在し, $\alpha\cdot\nu$ は $\tilde{f}$-不変エルゴード的確率測度となり次が成り立つ:

$$v(f)=\frac{h_{\alpha\nu}(\tilde{f})}{\int_{\tilde{J}(\tilde{f})}(\log\|\tilde{f}'\|)\cdot\alpha\ d\nu}\le\frac{\log(\sum_{j=1}^m\deg(f_j))}{\int_{\tilde{J}(\tilde{f})}(\log\|\tilde{f}'\|)\cdot\alpha\ d\nu}. \tag{6.2}$$

この定理から拡大的有理半群 G について $\dim_H(J(G))$ の上からの評価を, 生成元の微分の大きさを用いて与えられる．この評価により $\dim_H(J(G))$ が真に 2 より小さく, 特に $J(G)$ に内点がない, と言える例が多くある．さらに定理 83 の不等号 (6.1) がいつ等号になるかについて以下の結果がある．

定理 84 ([57])　$f=(f_1,\dots,f_m)\in \mathrm{Exp}(m), G=\langle f_1,\dots,f_m\rangle$ とする．また, f は開集合条件を満たすとする．このとき, 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus(A(G)\cup P(G))$ について,

$$\dim_H(J(G))=\underline{\dim}_B(J(G))=\overline{\dim}_B(J(G))=s_0(G)=S_G(z)=v(f)=Z_f(z)=z_0(f) \tag{6.3}$$

となる．また, $v(f)$-次元ハウスドルフ測度を $H^{v(f)}$ とするとき, $0<H^{v(f)}(J(G))<\infty$ となる．さらに, 定理 83 の ν について, $(\pi_{\hat{\mathbb{C}}})_*(\nu)=(H^{v(f)}|_{J(G)})/(H^{v(f)}(J(G)))$ となる．さらに, ある正定数 C があって, 任意の $0<r<\mathrm{diam}\ \hat{\mathbb{C}}$ に対して $C^{-1}\le(((\pi_{\hat{\mathbb{C}}})_*(\nu))(B(x,r)))/r^{v(f)}\le C$ となる．

また, $\mathrm{Exp}(m)$ において $f\mapsto v(f)$ が連続であることがすぐ示されるのだが, $e^{P(t,f)}$ がある作用素の最大孤立固有値であることと作用素の摂動論を用いて, 次が示される．以下では, $\mathrm{Exp}(m)$ が $(\mathrm{Rat})^m$ の開集合なので (補題 72), $\mathrm{Exp}(m)$ の各連結成分は有限次元の複素多様体であることに注意する．

定理 85 ([65])　$m\in\mathbb{N}$ のとき $\mathrm{Exp}(m)$ において $f\mapsto v(f)$ は実解析的かつ多重劣調和である．

さきに見たとおり, $\mathrm{Exp}(m)$ は $(\mathrm{Rat})^m$ の開集合であるが, $\mathrm{Exp}(m)$ のどこで開集合条件が満たされるか, また, いつ開集合条件が満たされてかつジュリア集合が連結になるか, という問題がある．これらについては, 後の 10 節の結果が一つの答えを与える．つまり, 10 節において, この節の結果が大いに活かされるのである．その結果は, ランダムな複素力学系に現れる複素平面上の特異関数を調べるのに使われる．なお $v(f)>2$ となる例は多数あり ([57, 65]), その場合にも興味深い結果がある．

7　臨界値集合が有界な多項式半群

この節では平面上の臨界値集合が有界な多項式半群を詳しく考察し, 通常の複素力学系では起きない現象を取り上げるとともに, あとのランダムな複素力学系に応用するための準備を行う．

定義 86　G が多項式半群のとき, $P^*(G):=P(G)\setminus\{\infty\}$ とおき, G の**平面臨界値集合**という．

定義 87　$\mathcal{G}$ を, 次の条件を満たす多項式半群 G の集合とする: ‘任意の $g\in G$ について $\deg(g)\ge 2$ で、かつ $P^*(G)$ は $\mathbb{C}$ 上で有界である.’ また, $\mathcal{G}_{dis}:=\{G\in\mathcal{G}\mid J(G)$ は非連結 $\}$ とおく．

例 88　$\Gamma = \{h(z) = cz^a(1-z)^b \mid a, b \in \mathbb{N}, c > 0, c(a/(a+b))^a(b/(a+b))^b \leq 1\}$ で生成された多項式半群の任意の部分半群は $\mathcal{G}$ に属す.

注意 89　g が多項式で $\deg(g) \geq 2$ ならば, '$\langle g \rangle \in \mathcal{G}$' $\Longleftrightarrow$ '$J(\langle g \rangle)$ は連結' となる ([37]). しかし, 一般の多項式半群では, $G \in \mathcal{G}$ かつ $J(G)$ が非連結, となる場合がある. (例: $G = \langle z^3, z^2/4 \rangle$.)

問題 90　$G \in \mathcal{G}_{dis}$ のとき, 何が起こるのか？

定義 91 ([63])　K_1, K_2 を $\mathbb{C}$ の有界な連結部分集合とする.

- $K_1 <_s K_2$ とは 'K_1 が $\mathbb{C} \setminus K_2$ のある有界な連結成分に含まれる' ときをいう.
- $K_1 \leq_s K_2$ とは, '$K_1 <_s K_2$ または $K_1 = K_2$' のときを言う.

注意 92　$\mathbb{C}$ の空でない連結コンパクト集合の空間では '$\leq_s$' は半順序. この '$\leq_s$' を, **surrounding order** という.

定義 93　多項式半群 G に対し $\hat{K}(G) := \{z \in \mathbb{C} \mid \{g(z) \mid g \in G\}$ が $\mathbb{C}$ で有界 $\}$ とおく.

定義 94　位相空間 X に対し, $\mathrm{Con}(X)$ で X の連結成分全体を表す.

以上のもとで (筆者による) 次の結果が成立する.

定理 95 ([63])　(コンパクトな族で生成されているとは限らない) 多項式半群 G が $\mathcal{G}_{dis}$ に属するとき, 次の全てが成り立つ.

(1) $J(G) \subset \mathbb{C}$ かつ $(\mathrm{Con}(J(G)), \leq_s)$ は全順序. (図 3, 図 4 参照.)

(2) $(\mathrm{Con}(J(G)), \leq_s)$ には最大元 $J_{\max}(G)$ と最小元 $J_{\min}(G)$ がある.

(3) $F(G)$ の各連結成分は単連結か二重連結.

(4) $\mathcal{A} := \{U \mid U$ は $F(G)$ の二重連結成分 $\}$ とおくと, $(\mathcal{A}, \leq_s)$ は全順序.

(5) $\mathrm{int}(\hat{K}(G)) \neq \emptyset$.

図 3：$G = \langle h_1, h_2 \rangle$ のジュリア集合. ただし, $g_1(z) := z^2 - 1, g_2(z) := z^2/4, h_1 := g_1^2, h_2 := g_2^2$. $G \in \mathcal{G}_{dis}$, $\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) > \aleph_0$. G は双曲的. (h_1, h_2) は開集合条件を満たす. また, $\forall J \in \mathrm{Con}(J(G)), \exists! \gamma \in \{h_1, h_2\}^{\mathbb{N}}$ s.t. $J = J_\gamma(f)$.

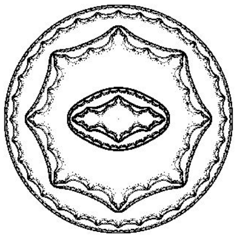
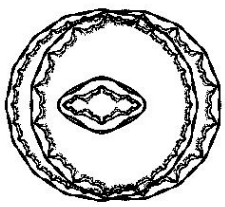


図 4：$\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = \aleph_0$ となる 3 元生成双曲的多項式半群 $G \in \mathcal{G}_{dis}$ のジュリア集合.



定理 96 ([63])　(コンパクトな族で生成されているとは限らない) $G \in \mathcal{G}$ が 2 次多項式の族で生成されているとする. このとき, $J(G)$ は連結である.

G が一つの 2 次以上の有理写像で生成されているときや, 非初等的クライン群のときは, $J(G)$ は連結であるか, そうでなければ非可算個の連結成分を持つ. しかし一般の有理半群では, $\mathcal{G}$ のなかの有限生成のものに限っても, 次の例がある.

定理 97 ([63])　任意の $n \in \mathbb{N}$ について, ある $G = \langle h_1, \ldots, h_{2n} \rangle \in \mathcal{G}$ があり, $\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = n$ となる. また, ある $G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle \in \mathcal{G}$ があり, $\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = \aleph_0$ となる (図 4).

注意 98　有限生成多項式半群 $G \in \mathcal{G}$ についての $\mathrm{Con}(J(G))$ の個数は, 8 節の '相互作用コホモロジー' に関係する. また, [63] のアイデアを発展させて, [49] において, 任意の $n \in \mathbb{N}$ についてある 4 元生成多項式半群 $G \in \mathcal{G}$ によって $\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = n$ となることが示されている. 同じ [49] では $G \in \mathcal{G}_{dis}$ について $F(G)$ の 2 つの異なる二重連結成分 A, B は境界まで含めて $J(G)$ 内の 'カントール集合でパラメータ付けされた擬円の族' で分離されることが示されている.

8　後方自己相似系の相互作用コホモロジー

多項式半群 G が有限生成の場合, ジュリア集合 $J(G)$ の後方自己相似性に着目して, 生成元たちの絡み具合を考えてみる. そのために, 次の一般的なことを考えて, それを多項式半群の話に応用する. とくに, (筆者による) 新しいコホモロジーを導入する.

定義 99 ([60])　(X, d) を距離空間とし, $h_j : X \to X$ $(j = 1, \ldots, m)$ を連続写像とする. L を X のコンパクト集合とする. $\mathfrak{L} = (L, (h_1, \ldots, h_m))$ が**後方自己相似系**であるとは, 次の二つの条件 (1)(2) がいずれも満たされるときをいう.

(1) $L = h_1^{-1}(L) \cup \cdots \cup h_m^{-1}(L)$. (2) 任意の $j = 1, \ldots, m$ と $z \in L$ に対し $h_j^{-1}(z) \neq \emptyset$.

定義 100 ([60])　$\mathfrak{L} = (L, (h_1, \ldots, h_m))$ が後方自己相似系のとき, 以下の記号を使う.

(1)　任意の $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma_m$ に対し, $L_x := \bigcap_{j=1}^{\infty} h_{x_1}^{-1} \cdots h_{x_j}^{-1}(L)$　$(\neq \emptyset)$ とおく.

(2)　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{U}_k := \{h_{x_1}^{-1} \cdots h_{x_k}^{-1}(L)\}_{(x_1, \ldots, x_k) \in \{1, \ldots, m\}^k}$ とおく (L の有限被覆).

(3)　L の被覆 $\mathcal{U}$ に対し, $N(\mathcal{U})$ で $\mathcal{U}$ の脈体をあらわす. $N(\mathcal{U}_k)$ の場合には, その vertex の集合は $\{1, \ldots, m\}^k$ であるがこのとき simplicial map $\varphi_k : N(\mathcal{U}_{k+1}) \to N(\mathcal{U}_k)$ を, $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ から誘導されるものとして定義する (ただし $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in \{1, \ldots, m\}^{k+1}$). これは, 細分によって誘導されるものと同じ.

(4)　$\mathrm{Cov}(\mathfrak{L}) := \{\mathcal{U}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とおく.

(5)　$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $\mathbb{Z}$ 加群 R に対し, $\check{H}^p(\mathfrak{L}; R) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(\mathfrak{L})} H^p(N(\mathcal{U}); R)$ とおく. これを, ***p*-th interaction cohomology group of $\mathfrak{L}$ with coefficients *R*** と呼ぶ. $\check{H}^p(\mathfrak{L}; R) \cong \varinjlim_k H^p(N(\mathcal{U}_k); R)$ に注意. $H^p(N(\mathcal{U}_k); R)$ を ***p*-th interaction cohomology group of $\mathfrak{L}$ at *k*-th stage with coefficients *R*** と呼ぶ.

(6)　$\check{H}^p(\mathfrak{L}; R)$ から $\check{H}^p(L; R)$　(p-th Čech cohomology group of L with coefficients R) に自然な射がある. これを $\Psi : \check{H}^p(\mathfrak{L}; R) \to \check{H}^p(L; R)$. とかく. (注：各 j について h_j^{-1} が一価な写像となり縮小的ならば, Ψ は同型である. しかし, 一般には Ψ は同型ではない.)

(7)　一般の抽象単体複体 Y に対し, $|Y|$ でその '幾何的実現'([44]) とする.

以上のもとで, 次が示される.

定理 101 ([60])　$\mathfrak{L} = (L, (h_1, \ldots, h_m))$ を後方自己相似系とし, 任意の $x \in \Sigma_m$ について L_x が連結である, と仮定する. このとき, 以下の (1)–(5) の全てが成り立つ.

(1) $\varprojlim_k \mathrm{Con}(|N(\mathcal{U}_k)|) \cong \varprojlim_{\mathcal{U}\in \mathrm{Cov}(\mathfrak{L})} \mathrm{Con}(|N(\mathcal{U})|) \cong \mathrm{Con}(L)$ (集合としての同型).

(2) 'L は連結' $\iff$ '$|N(\mathcal{U}_1)|$ は連結' $\iff$ '任意の $i,j\in\{1,\dots,m\}$ に対し, ある列 $\{i_t\}_{t=1}^s \subset \{1,\dots,m\}$ が存在し, $i_1=i,\ i_s=j,\ h_{i_t}^{-1}(L)\cap h_{i_{t+1}}^{-1}(L)\neq\emptyset\quad(t=1,\dots,s-1)$ となる.'

(3) $m=2$ で L が非連結ならば, $h_1^{-1}(L)\cap h_2^{-1}(L)=\emptyset$ となり, また, $\mathrm{Con}(L)\cong\{1,2\}^{\mathbb{N}}$. よって $\sharp(\mathrm{Con}(L))>\aleph_0$.

(4) $m=3$ で L が非連結ならば, $\sharp(\mathrm{Con}(L))\geq\aleph_0$.

(5) R を体として, '$\dim_R \check{H}^0(\mathfrak{L};R)<\infty \iff \sharp(\mathrm{Con}(L))<\infty$' である. また, これらが成り立つとき, $\dim_R \check{H}^0(\mathfrak{L};R)=\sharp(\mathrm{Con}(L))$ となる.

注意 102　上記の定理 101-(3) は, 10 節の定理 125 の各結果を示すのに重要な役割を果たす.

次に, $\check{H}^1(\mathfrak{L};R)$ はどうなるか, また, $\langle h_1,\dots,h_m\rangle$ が有限生成多項式半群の場合, $\check{H}^1(\mathfrak{L};R)$ が 0 である例は簡単に作れるが, 0 でない例はあるか, ということを考える.

定理 103 ([60])　$m\geq3$ とし, $\mathfrak{L}=(L,(h_1,\dots,h_m))$ を後方自己相似系とする. さらに以下の (1) から (4) の全てを仮定する.

(1) $|N(\mathcal{U}_1)|$ は連結.

(2) $(h_1^2)^{-1}(L)\cap(\bigcup_{i:i\neq1} h_i^{-1}(L))=\emptyset$.

(3) 互いに異なるある $j_1,j_2,j_3\in\{1,\dots,m\}$ があり次を満たす: '$j_1=1$ であり, かつ任意の $k=1,2,3$ について $h_{j_k}^{-1}(L)\cap h_{j_{k+1}}^{-1}(L)\neq\emptyset$ (ただし $j_4:=j_1$) となる.'

(4) 任意の $s,t\in\{1,\dots,m\}$ に対し, '$s,t,1$ が互いに異なれば, $h_1^{-1}(L)\cap h_s^{-1}(L)\cap h_t^{-1}(L)=\emptyset$.'

このとき, R を体として $\dim_R \check{H}^1(\mathfrak{L};R)=\infty$ となる.

注意 104　[60] においては, '前方不分岐' という条件のもとで $H^p(N(\mathcal{U}_k);R)$ が k について帰納的に計算できる, ということが示されている. $H^p(N(\mathcal{U}_k);R)$ のランクの $k\to\infty$ のときの増大度はシステムの複雑さを表す一つの量と考えられる. 例えば, $h_j(z)=2(z-p_j)+p_j,\ j=1,2,3,\ p_1,p_2,p_3\in\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ で正三角形をなす, とすると, $G=\langle h_1,h_2,h_3\rangle$ に対し $J(G)$ はシルピンスキーガスケット (図 2) であり, $(J(G),(h_1,h_2,h_3))$ に対して上記の結果を適用できて, 体 R に対し $a_k:=\dim_R H^1(N(\mathcal{U}_k);R)$ とおくと $a_1=1, a_{k+1}=3a_k+1$ となることがわかる. また, h_j たちの n-word たち, からいくつか抜いて作ったある後方自己相似系に対して, 上の結果を適用することもでき, その場合の L が無限個の連結成分を持つ, というようなことを示すこともできる. 一次 (以上) のコホモロジーの情報が, L の連結成分の個数の情報に関係しうるのである.

注意 105　interaction cohomology は, $L=\bigcup_{j=1}^m h_j(L)$ となる $(L,(h_1,\dots,h_m))$ (このとき**前方自己相似系**という) についても定義され, 上記の結果と類似の結果を得ることができる ([60]).

有限生成多項式半群 $G=\langle h_1,\dots,h_m\rangle$ について $(J(G),(h_1,\dots,h_m))$ は後方自己相似系である. そこで, これまでのことを応用してみる. まず, 命題 30 (4) (ポテンシャル論の応用) とリーマン・フルビッツ公式と補題 28-(2) を使うと, 次が得られることに注意する.

命題 106　$m\in\mathbb{N}$ とする.　各 $j=1,\dots,m$ について, h_j を次数が 2 以上の多項式とし, $G=\langle h_1,\dots,h_m\rangle$ とする.　このとき, $G\in\mathcal{G}$ であることと, 後方自己相似系 $(J(G),(h_1,\dots,h_m))$ が '任意の $x\in\Sigma_m$ について $(J(G))_x$ は連結' を満たすことは同値.

系 107 ([60])　(定理 101 と命題 106 の系) $G=\langle h_1,\dots,h_m\rangle\in\mathcal{G}$ とすると, 後方自己相似系 $\mathfrak{L}=(J(G),(h_1,\dots,h_m))$ に対して, 定理 101 の (1)–(5) が成り立つ.

定理 103 と Leray の定理 ([24]), Alexander 双対定理 ([44]) などを組み合わせると次を得る.

定理 108 ([60])　$G = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle \in \mathcal{G}$ とする. かつ後方自己相似系 $\mathfrak{L} = (J(G), (h_1, \ldots, h_m))$ が定理 103 の仮定を満たすとする. このとき, R を体として次が成り立つ.

(1) $\dim_R \check{H}^1(\mathfrak{L}; R) = \dim_R(\Psi(\check{H}^1(\mathfrak{L}); R))) = \infty$ かつ, 自然な射 $\Psi : \check{H}^1(\mathfrak{L}; R) \to \check{H}^1(J(G); R)$ は単射.

(2) $F(G)$ $(= \hat{\mathbb{C}} \setminus J(G))$ は無限個の連結成分を持つ.

命題 109 ([60])　ある $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathcal{Y}^4$ で, 定理 108 の仮定を満たすものがある. とくにこの $\mathfrak{L} = (J(G), (h_1, \ldots, h_4))$ について $\dim_R \check{H}^1(\mathfrak{L}; R) = \infty$ (R は体).

問題 110　(未解決) $m \in \mathbb{N}$ とし, R を体とする. $(h_1, \ldots, h_m) \in \mathcal{Y}^m$ で, $\langle h_1, \ldots, h_m \rangle \in \mathcal{G}$ かつ $\mathfrak{L} = (J(\langle h_1, \ldots, h_m \rangle), (h_1, \ldots, h_m))$ について $0 < \dim_R \check{H}^1(\mathfrak{L}; R) < \infty$ となるものは存在するか？

9　ランダムな複素力学系

この節ではランダムな複素力学系を考察する. まず, ランダムな複素力学系を初めて考察したとみられる Fornaess-Sibony の結果を紹介し, そのアイデアを発展させた R. Brück, M. Büger, S. Reitz らの結果を紹介する. そのあとで, 有理半群の力学系の理論とランダムな複素力学系を組み合わせた筆者の最近のアイデアを紹介し, その応用として悪魔の階段の複素平面上版が得られることを示す.

まず, Fornaess-Sibony の結果 ([21]) を紹介する. 以下の記号と設定を用いる.

記号と設定: W を $\mathbb{C}$ の領域とし正則写像 $R : W \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が与えられているとする. 任意の $c \in W$ について $R_c(z) := R(c, z)$ とおき, これは 2 次以上の有理写像であるとする. W の任意の空でないコンパクト集合 K に対し $X(K) = K^{\mathbb{N}}$ とおく. $\sigma : X(K) \to X(K)$ をシフト写像, つまり $\sigma(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ なるものとする. $\sigma : X(K) \to X(K)$ 上の有理歪積 $f : X(K) \times \hat{\mathbb{C}} \to X(K) \times \hat{\mathbb{C}}$ を $f(x, y) = (\sigma(x), R_{x_1}(y))$ で定義する. ただし $x = (x_1, x_2, \ldots)$. また $c \in \mathbb{C}, r > 0$ のとき $D(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$ とおく.

以上のもとで, 次が成り立つ.

定理 111 ([21])　任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し $c \mapsto R_c(z)$ は定数でないとする. また $c_0 \in W$ を一つの点とする. R_{c_0} は $k \geq 1$ 個の吸引サイクル $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ を持つとする. 任意の $j \in \{1, \ldots, k\}$ に対し, V_j を, γ_j の開近傍で γ_j の吸引域に含まれるものとする. このとき, ある $\delta_0 > 0$ があり, 任意の $0 < \delta < \delta_0$ に対し, 設定における K が $\overline{D(c_0, \delta)}$ のときの有理歪積 $f : X(K) \times \hat{\mathbb{C}} \to X(K) \times \hat{\mathbb{C}}$ を考えると, $\hat{\mathbb{C}}$ 上のある連続関数 $h_1, \ldots, h_k$ があって, 次の 3 つの条件を全て満たす.

(1) 任意の $j \in \{1, \ldots, k\}, y \in \hat{\mathbb{C}}$ について $0 \leq h_j(y) \leq 1$ であり, かつ $\sum_{j=1}^{k} h_j(y) = 1$,

(2) λ を $\overline{D(c_0, \delta)}$ 上の正規化された 2 次元ルベーグ測度とすると, 任意の $y \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $X(K)$ のある互いに交わらない開集合 $U_{1,y}, U_{2,y}, \ldots, U_{k,y}$ があり, $(\otimes_{i=1}^{\infty} \lambda)(U_{j,y}) = h_j(y)$ $(\forall j)$ を満たし, かつ '$j \in \{1, \ldots, k\}$, $x \in U_{j,y}$ のとき十分大なる $n \in \mathbb{N}$ について $f_{x,n}(y) \in V_j$' を満たす.

(3) $(\otimes_{i=1}^{\infty} \lambda)$ に関してほとんどすべての $x \in X(K)$ に対して, $J_x(f)$ の 2 次元ルベーグ測度は 0.

上記は通常の複素力学系で成り立つ '遊走領域非存在定理' を援用しながらランダムな複素力学系の手法をとって得られたもので, 証明はアイデアに富んでいる. しかしながら, 上記では δ が十分小さい値のときしか扱われていないのが不満であった. そこで, Brück, Gong らは $W = \mathbb{C}$, $R(c, z) = z^2 + c$ の場合に, 以下のことを研究した (定理 112,113,114).

定理 112 ([10])　$K = \overline{D(0,1/4)}$ とする．λ を K 上のボレル確率測度とし, その台が K と等しいとする．このとき, $X(K)$ のある部分集合 $\mathcal{U}$ があって, $(\otimes_{i=1}^{\infty}\lambda)(\mathcal{U}) = 1$ を満たし, かつ任意の $x \in \mathcal{U}, y \in \overline{D(0,1/2)}$ に対して $\{f_{x,n}(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\overline{D(0,1/2)}$ にて稠密になる．

記号: $R_c(z) = z^2 + c$ に対し, $\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \{R_c^n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$は $\mathbb{C}$ 上有界$\}$ とおいて, **マンデルブロー集合**という ([36]).

定理 113 ([10, 8])　$\delta > 1/4, K := \overline{D(0,\delta)}$ とし、λ を K 上の正規化された 2 次元ルベーグ測度とする。このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の $y \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し, ある $U_y \subset X(K)$ があり, $(\otimes_{i=1}^{\infty}\lambda)(U_y) = 1$ かつ任意の $x \in U_y$ に対して $f_{x,n}(y) \to \infty (n \to \infty)$ となる．特に, $\otimes_{i=1}^{\infty}\lambda$ に関してほとんど全ての $x \in X(K)$ に対して, $J_x(f)$ の 2 次元ルベーグ測度は 0 になる.

(2) $\otimes_{i=1}^{\infty}\lambda$ に関してほとんど全ての $x \in X(K)$ に対して, $J_x(f)$ は無限個の連結成分を持つ.

また, $J_x(f)$ の連結成分については, 次の結果がある.

定理 114 ([22])　$\delta > 1/4$ とし, $K = \overline{D(0,\delta)}$ とする．このとき, $X(K)$ のある可算個の稠密開部分集合の交わりである $\mathcal{U}$ があり, 任意の $x \in \mathcal{U}$ について, $J_x(f)$ の各連結成分は 1 点からなる.

なお, 定理 113 などを導く際に基礎になるのは Büger の論文 ([11, 12]) である．ここではそのうちの重要な結果を紹介しておく.

定理 115 ([11])　$(\pi, Y = X \times \hat{\mathbb{C}}, X)$ を自明 $\hat{\mathbb{C}}$-束とし, $f : Y \to Y$ を $g : X \to X$ 上の多項式歪積で任意の $x \in X$ について $d(x) \geq 2$ となるとする．$x \in X$ を任意の点とし, U を $J_x(f)$ の空でない開部分集合とする．このとき, ある $n \in \mathbb{N}$ があり, $f_{x,n}(U) = J_{g^n(x)}(f)$ となる.

上記以外のランダムな複素力学系に関するものとして, [9, 14, 15, 16, 17, 2, 3, 4, 5, 39, 40] などがある．(なお [17] の主結果のかなりの部分は [42, 55] から簡単に従うことに注意．) 上記のようにランダムな複素力学系に関して様々な結果が得られてきているが, [21] のように摂動の幅が小さい場合であったり, 2 次多項式に限っている場合が多い．そこで筆者は, 以下のように有理半群の力学系の研究と組み合わせて, より一般的に, より組織的に研究することを考えた.

筆者によるランダムな複素力学系の設定と記号 ([61, 62]):

(1) τ を Rat 上のボレル確率測度とする．以下, 毎回, 同じ確率分布 τ に従って有理写像を選択する, ‘$\hat{\mathbb{C}}$ 上の (独立同分布の) ランダムな複素力学系’ を考えていく．(これは $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフ過程である．)

(2) $X_\tau := (\mathrm{supp}\ \tau)^{\mathbb{N}}$ とおく．ただし, supp τ は τ の台を表す.

(3) $\tilde{\tau} := \otimes_{j=1}^{\infty}\tau$ とおく．これは X_τ 上のボレル確率測度.

(4) G_τ を, supp τ で生成された有理半群, とする.

(5) $C(\hat{\mathbb{C}}) := \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R} \mid \varphi$ は連続$\}$ とおき, 作用素 $M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$ を, $M_\tau(\varphi)(z) := \int_{\mathrm{supp}\ \tau} \varphi(g(z))\ d\tau(g)$ で定義する.

(6) $\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ で $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度全体とする．これに弱位相を入れる．$\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ はコンパクト距離空間となる．また, $(M_\tau)_* : \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ を, M_τ の双対写像とする.

(7) $F_{meas}(\tau)$ で, 次を満たす $\mu \in \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ の集合とする：‘μ の $\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ におけるある近傍 B があって, $\{(M_\tau)_*^n : B \to \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ は B 上同程度連続になる.’ また, $J_{meas}(\tau) := \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \setminus F_{meas}(\tau)$

とおく.

(8) supp $\tau \subset \mathcal{Y}$ のとき, 任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し,

$$T_{\tau,\infty}(z) := \tilde{\tau}(\{h = (h_1, h_2, \ldots) \in X_\tau \mid h_n \cdots h_1(z) \to \infty, \text{as } n \to \infty\})$$

とおく. これは, 毎回確率分布 τ に従って多項式を選択するようなランダムな複素力学系の, '初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して, ∞ に行く確率' である. (注：$\infty \in F(G_\tau)$ ならば $T_{\tau,\infty}$ は $F(G_\tau)$ の各連結成分上で定数関数 (その定数は成分による) である.)

注意 116　$h \in$Rat が次数 2 以上で, τ が一点 h に台を持つ Rat でのディラック測度のときには $J_{meas}(\tau) \neq \emptyset$ である. 実際, 写像 $g \mapsto \delta_g$ により $\hat{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ に埋め込むと $J(h) \subset J_{meas}(\tau)$.

有理半群の力学系とランダムな複素力学系を考えるときは, 次の集合を考えることが鍵になる.

定義 117 ([61, 62])　有理半群 G に対し, $J_{\ker}(G) := \bigcap_{g \in G} g^{-1}(J(G))$ とおいて, これを G の**核ジュリア集合 (kernel Julia set)** という.

次が基本的である.

定理 118 ([61, 62])　supp τ は Rat でコンパクトとし, $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ とする. $f : X_\tau \times \hat{\mathbb{C}} \to X_\tau \times \hat{\mathbb{C}}$ を supp τ に付随する有理歪積とする. このとき, $F_{meas}(\tau) = \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ となり, かつ $\tilde{\tau}$ に関するほとんど全ての $\gamma \in X_\tau$ に対して, $J_\gamma(f)$ の 2 次元ルベーグ測度は 0.

定理 118 から, 次が従う.

命題 119 ([61, 62])　supp τ が $\mathcal{Y}$ のコンパクト部分集合であるとし, $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ とする. このとき, $T_{\tau,\infty} : \hat{\mathbb{C}} \to [0, 1]$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で連続である.

定理 118, 命題 119, 定理 95 などを組み合わせると, 次を得る.

定理 120 ([61, 62])　上の記号と設定のもとで supp τ は $\mathcal{Y}$ のコンパクト部分集合, かつ $G_\tau \in \mathcal{G}_{dis}$ とする. このとき, 次の (1) から (7) の全てが成り立つ.

(1) $F(G_\tau)$ の任意の連結成分 U に対し, ある $C_U \in [0, 1]$ があり, $T_{\tau,\infty}|_U \equiv C_U$.

(2) (**連続性**)$T_{\tau,\infty} : \hat{\mathbb{C}} \to [0, 1]$ は連続関数で, $M_\tau(T_{\tau,\infty}) = T_{\tau,\infty}$.

(3) (**単調性**) $\mathcal{A} := \{U \mid U$ は $F(G)$ の二重連結成分 $\}$ とおく.

(a) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 <_s A_2$ のとき, $C_{A_1} < C_{A_2}$. 特に, $\{C_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ は全て互いに異なる.

(b) $J_1, J_2 \in \mathrm{Con}(J(G_\tau))$, $J_1 <_s J_2$ のとき $\max_{z \in J_1} T_{\tau,\infty}(z) \leq \min_{z \in J_2} T_{\tau,\infty}(z)$ となる.

(4) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, $T_{\tau,\infty}|_{\hat{K}(G_\tau)} \equiv 0 < C_A < 1 \equiv C_{F_\infty(G_\tau)}$. ただし $F_\infty(G_\tau)$ は ∞ を含む $F(G_\tau)$ の連結成分とする.

(5) Q を $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合とする. このとき, $Q \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \partial A \bigcup \partial(F_\infty(G_\tau)) \bigcup \partial(\hat{K}(G_\tau))\right) \neq \emptyset$ ならば, $T_{\tau,\infty}|_Q$ は定数関数ではない. (以上の (1),…,(5) から, $T_{\tau,\infty}$ は '悪魔の階段' に似ている. このような関数を**悪魔のコロシアム**と呼ぶ. 図 5, 6 参照.)

(6) $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ であり, とくに $F_{meas}(\tau) = \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ である.

(7) $\hat{K}(G_\tau)$ 上の $(M_\tau)_*$ 不変なあるボレル確率測度 μ で次を満たすものが唯一つ存在する：'任意の $\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して, $\hat{\mathbb{C}}$ 上一様に $M_\tau^n(\varphi)(z) \to T_{\tau,\infty}(z) \cdot \varphi(\infty) + (1 - T_{\tau,\infty}(z)) \cdot (\int_{\hat{\mathbb{C}}} \varphi \, d\mu)$ $(n \to \infty)$ となる.' よって $\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ 上で一様に $(M_\tau^n)_*(\nu) \to (\int_{\hat{\mathbb{C}}} T_{\tau,\infty} \, d\nu) \cdot \delta_\infty + (\int_{\hat{\mathbb{C}}}(1 - T_{\tau,\infty}) \, d\nu) \cdot \mu$ $(n \to \infty)$ となる. また, $C(\hat{\mathbb{C}})$ の M_τ 不変部分空間は定数と $T_{\tau,\infty}$ で張られた 2 次元空間. さらに, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $(M_\tau)_*$ 不変ボレル確率測度のなかのエルゴード成分は δ_∞ と μ の 2 つ.

注意 121　有理半群の力学系を調べて結果が得られれば, それはランダムな複素力学系に応用されるわけだが, 逆に, 定理 118, 120, 命題 119 などを用い, $T_{\tau,\infty}$ のレベル集合を考えることなどにより, $J(G)$ の構造を知ることができる. つまり, 有理半群の力学系を研究するのに, 一旦ランダムな複素力学系を経由して, 元の有理半群の力学系を調べる, という手法が有効である.

10　2 元生成多項式半群の空間

この節では, これまでの節のことを応用して, 2 元生成の多項式半群に限って詳しく考察する. 特に, 2 元生成の, 臨界値集合が有界な (双曲的) 多項式半群の空間を考え, ジュリア集合が非連結なパラメータの集合 (disconnectedness locus という) の閉包の近傍において, '∞ に収束する確率の関数' が悪魔の階段 (カントール関数) に似た性質を複素平面上で持つことを示す. さらに, disconnectedness locus の閉包において, '∞ に収束する確率の関数' を確率パラメータで偏微分することができることを示し, 偏導関数は初期値 z の関数として高木関数の複素平面上版とみなせることを示す.

定義 122 ([61])　次の記号を使う.

- $\mathcal{B} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid P^*(\langle h_1,h_2\rangle)$ は $\mathbb{C}$ で有界 (bounded)$\}$ とおく.
- $\mathcal{C} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(\langle h_1,h_2\rangle)$ は連結 (connected)$\}$ とおく.
- $\mathcal{D} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(\langle h_1,h_2\rangle)$ は非連結 (disconnected)$\}$ とおく.
- $\mathcal{H} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid \langle h_1,h_2\rangle$ は双曲的 (hyperbolic)$\}$ とおく.
- $\mathcal{I} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(h_1) \cap J(h_2) \neq \emptyset\}$ とおく.
- $\mathcal{Q} := \{(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(h_1) = J(h_2),$ かつ $J(h_1)$ と $J(h_2)$ は擬円 (quasicircle)$\}$ とおく.

補題 123　集合 $\mathcal{H}, \mathcal{B}\cap\mathcal{H}, \mathcal{D}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ は, いずれも $\mathcal{Y}^2$ の空でない開部分集合である.

定義 124　$h=(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2$, $z \in \hat{\mathbb{C}}, p \in (0,1)$ とするとき, 以下の記号を使う.

• $T(h_1,h_2,p,z)$ を, '$\hat{\mathbb{C}}$ 上で, 毎回, h_1 を確率 p で, h_2 を確率 $1-p$ で選択するランダムな力学系における, 無限遠点 $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ に収束する確率' とおく. より正確には, $\tau_{h_1,h_2,p} := p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2}$, とおいて ($\delta_{h_i}$ は一点 h_i に台を持つディラック測度), $T(h_1,h_2,p,z) := T_{\tau_{h_1,h_2,p},\infty}(z)$ とおく. (注 : $z \mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $F(\langle h_1,h_2\rangle)$ 上, 局所定数関数である.)

• $\tilde{h} : \Sigma_2 \times \hat{\mathbb{C}} \to \Sigma_2 \times \hat{\mathbb{C}}$ を $h=(h_1,h_2) \in \mathcal{Y}^2$ に付随する有理歪積とし, ρ を $\Sigma_2 \times \hat{\mathbb{C}}$ 上の $\tilde{h}$-不変ボレル確率測度とする. このとき関数 $\tilde{p} : \Sigma_2 \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ を $\tilde{p}(z) = p$ if $\pi(z) = (1,\ldots)$, $\tilde{p}(z) = 1-p$ if $\pi(z) = (2,\ldots)$, で定義し, そして $u(h_1,h_2,p,\rho) := -(\int_{\Sigma_2\times\hat{\mathbb{C}}} \log \tilde{p}\ d\rho)/(\int_{\Sigma_2\times\hat{\mathbb{C}}} \log|\tilde{h}'|\ d\rho)$ とおく (分母の積分が収束するときに意味を持つ値である).

• $\mathbb{C}$ の開集合 V 上で定義された関数 $\varphi : V \to \mathbb{R}$ と点 $y \in V$ に対し, y のまわりで φ が有界なとき $\mathrm{H\ddot{o}l}(\varphi,y) := \inf\{\beta \in \mathbb{R} \mid \limsup_{z\to y}(|\varphi(z)-\varphi(y)|/|z-y|^{\beta}) = \infty\}$ とおき, **y における φ の各点ヘルダー指数**と呼ぶ. (**注意:** $\mathrm{H\ddot{o}l}(\varphi,y) < 1$ ならば φ は y で全微分不可能で, $\mathrm{H\ddot{o}l}(\varphi,y) > 1$ ならば φ は y で全微分可能でその微分は 0 である.)

以上の記号のもとで (筆者による) 次の結果が成立する.

定理 125 ([61])　次の (1) から (15) の全てが成り立つ.

(1) $(h_1,h_2) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{B}$ かつ $G = \langle h_1,h_2\rangle$ とする. このとき, $h_1^{-1}(J(G)) \cap h_2^{-1}(J(G)) = \emptyset$ となる.

(2) $\overline{\mathrm{int}(\mathcal{C})} \cap \mathcal{B}\cap\mathcal{H} = \mathcal{C}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ となる.

(3) 任意の $(h_1,h_2) \in (\overline{\mathcal{D}}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}) \setminus \mathcal{Q}$ に対し, (h_1,h_2) は開集合条件を満たす.

(4) 任意の $(h_1,h_2)\in\overline{\mathcal{D}}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ に対し, $\dim_H(J(\langle h_1,h_2\rangle))<2$.

(5) $(h_1,h_2)\in(\overline{\mathcal{D}}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})\setminus\mathcal{Q}$ とする．このとき, 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus P(\langle h_1,h_2\rangle)$ に対して, $\dim_H(J(\langle h_1,h_2\rangle))=Z_{(h_1,h_2)}(z)$ となる．さらに, ある $\epsilon>0$ と, (h_1,h_2) の $\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ におけるある近傍 V によって, '任意の $(g_1,g_2)\in V$ と 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus P(\langle g_1,g_2\rangle)$ に対し, $\dim_H(J(\langle g_1,g_2\rangle))\le Z_{(g_1,g_2)}(z)\le 2-\epsilon$' となる．

(6) $\mathcal{D}\cap\mathcal{Q}=\emptyset$ となる．$\mathcal{Y}^2$ の任意の連結成分 $\mathcal{V}$ に対し $\mathcal{Q}\cap\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}$ の真部分 variety に含まれる．

(7) $((\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})\setminus\mathcal{Q}$ は $(\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ で稠密である．

(8) $h_1\in\mathcal{Y}$, $\langle h_1\rangle\in\mathcal{G}$, かつ h_1 は双曲的とする．また $d\in\mathbb{N}, d\ge 2$ とし, $(\deg(h_1),d)\ne(2,2)$ とする．このとき, ある $h_2\in\mathcal{Y}$ があって, $(h_1,h_2)\in((\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})\setminus\mathcal{I}$, $\deg(h_2)=d$ となる．

(9) 任意の $(h_1,h_2)\in(\mathcal{D}\cap\mathcal{B})\cup((\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})$ と任意の $0<p<1$ に対し, $J(\langle h_1,h_2\rangle)=\{z_0\in\hat{\mathbb{C}}\mid z_0$の任意の近傍 U に対し, $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は U 上定数でない $\}$ となる．

(10) $(h_1,h_2)\in(\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$, $0<p<1$ とする．このとき, '$z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続' $\iff$ '$J(h_1)\cap J(h_2)=\emptyset$.'

(11) $(h_1,h_2)\in((\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})\setminus\mathcal{I}$ とする． このとき, (h_1,h_2) の $\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ におけるある近傍 V があって, 任意の $(g_1,g_2)\in V$ と任意の $0<p<1$ に対し, $z\mapsto T(g_1,g_2,p,z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続となる．

(12) $(h_1,h_2)\in(\mathcal{D}\cap\mathcal{B})\cup(((\partial\mathcal{C})\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H})\setminus\mathcal{I})$ とし, $G=\langle h_1,h_2\rangle$ とおく．このとき, 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}$ に対して, 関数 $p\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $(0,1)$ 上, 実解析的である．さらに, 任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, 関数 $(p,z)\mapsto(\partial^nT/\partial p^n)(h_1,h_2,p,z)$ は $(0,1)\times\hat{\mathbb{C}}$ 上連続である．さらに, 作用素 $M_{h_1,h_2,p}:C(\hat{\mathbb{C}})\to C(\hat{\mathbb{C}})$ を $M_{h_1,h_2,p}(\varphi)(z)=p\varphi(h_1(z))+(1-p)\varphi(h_2(z))$ で定義すると, $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は '$M_{h_1,h_2,p}(\varphi)=\varphi,\varphi|_{\hat{K}(G)}\equiv 0,\varphi|_{F_\infty(G)}\equiv 1$' を満たす唯一つの $\varphi\in C(\hat{\mathbb{C}})$ として特徴づけられる．ここで $F_\infty(G)$ は $F(G)$ の ∞ を含む連結成分を表す．そして帰納的に, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ のとき $z\mapsto(\partial^{n+1}T/\partial p^{n+1})(h_1,h_2,p,z)$ は '$\varphi(z)\equiv M_{h_1,h_2,p}(\varphi)(z)+(n+1)\left((\partial^nT/\partial p^n)(h_1,h_2,p,h_1(z))-(\partial^nT/\partial p^n)(h_1,h_2,p,h_2(z))\right)$, $\varphi|_{\hat{K}(G)\cup F_\infty(G)}\equiv 0$' を満たすただ一つの $\varphi\in C(\hat{\mathbb{C}})$ として特徴付けられる．

(13)(**全微分不可能性**) $(h_1,h_2)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{B}$, $G=\langle h_1,h_2\rangle$, $0<p<1$ とする．多価写像 $h=(h_1,h_2)\in\mathcal{Y}^2$ と重み $a=(p,1-p)$ に対して, 定理 35 における $\Sigma_2\times\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度 ρ^a をとり, $\lambda_p:=(\pi_{\hat{\mathbb{C}}})_*(\rho^a)$ とおく．このとき, $\mathrm{supp}\,\lambda_p=J(G)$ であり, λ_p に関するほとんど全ての点 $z_0\in J(G)$ において, $(*)$ $\mathrm{H\ddot{o}l}(T(h_1,h_2,p,\cdot),z_0)\le u(h_1,h_2,p,\rho^a)$ $=-\left(p\log p+(1-p)\log(1-p)\right)/\left(p\log(\deg(h_1))+(1-p)\log(\deg(h_2))\right)<1$ となって z_0 で $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は全微分不可能である．特に, $J(G)$ の非可算稠密部分集合 A があり, A の各点で $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は全微分不可能である．また $(h_1,h_2)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$ ならば $(*)$ の $\le$ が $=$ になる．

(14)(**双曲性を持つときのヘルダー連続性**) $(h_1,h_2)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$, $0<p<1$ とする． このとき, $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上ヘルダー連続である．

(15) $(h_1,h_2)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$, $G=\langle h_1,h_2\rangle$, $0<p<1$ とする．$v=\dim_H(J(G))$ とし, H^v を v 次元のハウスドルフ測度とする．(注：このとき, [57] より, $0<H^v(J(G))<\infty$ である．）また, $h=(h_1,h_2)$ に対して定理 83 を適用したときの $\tilde{J}(\tilde{h})$ 上のボレル確率測度 ν と $\alpha\in C(\tilde{J}(\tilde{h}))$ をとり, $\eta:=\alpha\cdot\nu$ とおく (η は $\tilde{h}$-不変ボレル確率測度である)．このとき, H^v に関するほとんど全ての $z_0\in J(G)$ に対し, $\mathrm{H\ddot{o}l}(T(h_1,h_2,p,\cdot),z_0)=u(h_1,h_2,p,\eta)$ となる．

注意 126　定理 125 の (13),(15) より, $(h_1, h_2) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$ を一つ固定するとき, p が 0 あるいは 1 に十分近いと, λ_p に関するほとんどすべての $z_0 \in J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ では $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分不可能だが, H^v に関するほとんど全ての $z_0 \in J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ では $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分が可能でその微分は 0 となる.

注意 127　$z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ が悪魔の階段やルベーグの特異関数の複素平面上版であり (図 5,6), $z \mapsto (\partial T/\partial p)(h_1, h_2, p, z)$ が高木関数の複素平面上版である (図 7).

図 5：$z \mapsto T(h_1, h_2, 1/2, z)$ のグラフ. ただし (h_1, h_2) は図 3 のもの. 悪魔のコロシアム (悪魔の階段の複素平面上版). $(h_1, h_2) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$. 変化点の集合は図 3 と一致する.

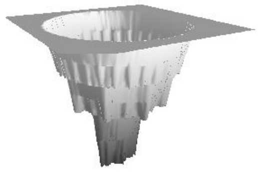


図 6：図 5 を上下逆にしたもの.

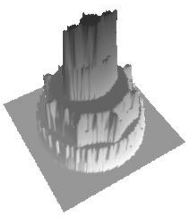
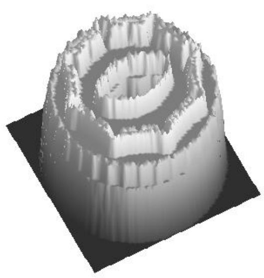


図 7：$z \mapsto (\partial T/\partial p)(h_1, h_2, 1/2, z)$ のグラフ. ただし, (h_1, h_2) は図 3 のもの. 高木関数の複素平面上版.



注意 128　定理 125-(13),(15) における $\mathrm{H\ddot{o}l}(T(h_1, h_2, p, \cdot), z_0) = u(h_1, h_2, p, \rho)$ (ただし ρ は ρ^a や η) の証明にバーコフ個別エルゴード定理とケーベ歪曲定理が用いられ, (13) の $u(h_1, h_2, p, \rho^a)$ を $p, \deg(h_j)$ を用いて計算するところには注意 36-(2) とポテンシャル論が用いられる.

(記：この一稿を亡き父誠司に捧げる)

文 献

[1] P. Allaart and K. Kawamura, Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 (2006), no. 2, 269–295.

[2] A. Ambroladze, Ergodic properties of random iterations of analytic functions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **19** (1999), no. 6, 1379–1388.

[3] A. Ambroladze and H. Wallin, Random iteration of Mobius transformations and Furstenberg's theorem, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **20** (2000), no. 4, 953–962.

[4] I. N. Baker and P. J. Rippon, On compositions of analytic self-mappings of a convex domain, Arch. math., Vol 55, 380-386 (1990).

[5] A. F. Beardon, T. K. Carne, D. Minda, and T. W. Ng, Random iteration of analytic maps, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2004) **24**, 659-675.

[6] D. Boyd, An invariant measure for finitely generated rational semigroups, Complex Variables Theory Appl. 39 (1999), no. 3, 229–254.

[7] D. Boyd, The immediate basin of attraction of infinity for polynomial semigroups of finite type, J. London Math. Soc. (2) 69 (2004), no. 1, 201–213.

[8] R. Brück, Connectedness and stability of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$, J. London Math. Soc. **61** (2000), 462-470.

[9] R. Brück, Geometric properties of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$, Pacific J. Math., **198** (2001), no. 2, 347–372.

[10] R. Brück, M. Büger and S. Reitz, Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: Connectedness of Julia sets, Ergod. Th. and Dynam. Sys., **19**, (1999), No.5, 1221–1231.

[11] M. Büger, Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **17** (1997), 1289–1297.

[12] M. Büger, On the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$, Math. Ann. 310 (1998), no. 4, 661–683.

[13] L. Carleson, P. W. Jones and J. -C. Yoccoz, Julia and John, Bol. Soc. Bras. Mat. **25, N.1** 1994, 1–30.

[14] M. Comerford, Infinitely many grand orbits, Michigan Math. J. 51 (2003), no. 1, 47–57.

[15] M. Comerford, Conjugacy and counterexample in random iteration, Pacific J. Math. 211 (2003), no. 1, 69–80.

[16] M. Comerford, A survey of results in random iteration, Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoit Mandelbrot. Part 1, 435–476, Proc. Sympos. Pure Math., 72, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[17] M. Comerford, Hyperbolic non-autonomous Julia sets, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **26** (2006), no. 2, 353–377.

[18] L. DeMarco and S. L. Hruska, Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets, to appear in Ergodic Theory Dynam. Sys., http://arxiv.org/abs/0704.0942.

[19] G. De Rham, Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles, Rend. Sem. Mat. Torino, **16**, pp 101-113 (1957).

[20] K. Falconer, Techniques in Fractal Geometry, John Wiley & Sons, 1997.

[21] J. E. Fornaess and N. Sibony, Random iterations of rational functions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **11**(1991), 687–708.

[22] Z. Gong, W. Qiu and Y. Li, Connectedness of Julia sets for a quadratic random dynamical system, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2003), **23**, 1807-1815.

[23] Z. Gong and F. Ren, A random dynamical system formed by infinitely many functions, Journal of Fudan University, **35**, 1996, 387–392.

[24] R. Gunning, Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. III: Homological Theory, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[25] T. Harada, The dynamics of nearly abelian polynomial semigroups at infinity, Proc. Japan Academy, Vol. 73, Ser. A, No. 3, (1997).

[26] T. Harada, The Teichmüller space of rational semigroup, preprint, http://www.math.okayama-u.ac.jp/∼tatsu/prep/index.html

[27] M. Hata and M. Yamaguti, Takagi function and its generalization, Japan J. Appl. Math., **1**, pp 183-199 (1984).

[28] A. Hinkkanen and G. J. Martin, The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I, Proc. London Math. Soc. (3)**73**(1996), 358–384.

[29] A. Hinkkanen and G. J. Martin, Julia Sets of Rational Semigroups , Math. Z. **222**, 1996, no.2, 161–169.

[30] A. Hinkkanen and G. J. Martin, Some properties of semigroups of rational functions, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), 53-58, de Gruyter, Berlin, 1996.

[31] M. Jonsson, Dynamics of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. **314** (1999), 403-447.

[32] M. Jonsson, Ergodic properties of fibered rational maps , Ark. Mat., 38 (2000), pp 281–317.

[33] K. Katagata, On a certain kind of polynomials of degree 4 with disconnected Julia sets, Discrete Contin. Dyn. Syst. 20 (2008), no. 4, 975–987.

[34] O. Lehto and K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the plane, Springer-Verlag, 1973.

[35] R. May, Stability and Complexity in Model Ecosystems, 2nd edn., Princeton Univ. Press Princeton, NJ, 1975.

[36] C. T. McMullen, Complex Dynamics and Renormalization, Annals of Mathematics Studies Number 135, Princeton University Press, 1994.

[37] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable

(Third Edition), Annals of Mathematical Studies, Number 160, Princeton University Press, 2006.

[38] R. Näkki and J. Väisälä, John Discs, Expo. math. 9(1991), 3–43.

[39] Y. Okuyama, Nevanlinna theoretical exceptional sets of rational towers and semigroups, Conform. Geom. Dyn. 10 (2006), 100–116 (electronic).

[40] S. Rohde, Composition of random rational functions, Complex Variable Theory Appl., 1996, Vol. 29, No. 1, 1-7.

[41] T. Sekiguchi and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function, Japan J. Appl. Math. **8**, pp203-219, 1991.

[42] O. Sester, Hyperbolicité des polynômes fibrés, Bull. Soc. Math. France **127** 1999, no. 3, 393–428.

[43] O. Sester, Combinatorial configurations of fibered polynomials, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2001), **21**, 915-955.

[44] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[45] R. Stankewitz, Completely invariant Julia sets of polynomial semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., **127**, (1999), No. 10, 2889–2898.

[46] R. Stankewitz, Completely invariant sets of normality for rational semigroups, Complex Variables Theory Appl., Vol 40.(2000), 199–210.

[47] R. Stankewitz, Uniformly perfect sets, rational semigroups, Kleinian groups and IFS's, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, (2000), No. 9, 2569–2575.

[48] R. Stankewitz, T. Sugawa and H. Sumi, Some counterexamples in dynamics of rational semigroups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29**, 2004, 357–366.

[49] R. Stankewitz and H. Sumi, Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups, preprint, http://arxiv.org/abs/0708.3187.

[50] T. Sugawa, Various domain constants related to uniform perfectness, Complex Variables Theory Appl. 36 (1998), no. 4, 311–345.

[51] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 401–418.

[52] H. Sumi, On Dynamics of Hyperbolic Rational Semigroups, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 37, No. 4, 1997, 717–733.

[53] H. Sumi, On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups, Kodai Math. J., Vol. 21, No. 1, pp. 10–28, 1998.

[54] H. Sumi, Skew product maps related to finitely generated rational semigroups, Nonlinearity, **13**, (2000), 995–1019.

[55] H. Sumi, Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2001), **21**, 563–603.

[56] H. Sumi, A correction to the proof of a lemma in 'Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products', Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2001), **21**, 1275–1276.

[57] H. Sumi, Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups, Kodai Math. J., Vol. 28, No. 2, 2005, pp390–422.

[58] H. Sumi, Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2006), **26**, 893–922.

[59] H. Sumi, Topics in dynamics of rational semigroups and fibered rational maps, RIMS Kokyuroku 1220, p78-122, 2001.

[60] H. Sumi, Interaction cohomology of forward or backward self-similar systems, preprint, 2008, http://arxiv.org/abs/0804.3822

[61] H. Sumi, The space of postcritically bounded 2-generator polynomial semigroups with hyperbolicity, RIMS Kokyuroku 1494, 62–86, 2006.

[62] H. Sumi, Random dynamics of polynomials and devil's-staircase-like functions in the complex plane, Appl. Math. Comput. 187 (2007) pp489-500. (Proceedings paper.)

[63] H. Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups, preprint 2007, http://arxiv.org/abs/math/0703591.

[64] H. Sumi, Erratum to 'Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups' (Ergodic Theory and Dynamical Systems 26 (2006) 893-922), Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2008) **28**, 1043-1045.

[65] H. Sumi and M. Urbański, Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, preprint, http://arxiv.org/abs/0707.2447.

[66] H. Sumi and M. Urbański, The equilibrium states for semigroups of rational maps, to appear in Monatsh. Math., http://arxiv.org/abs/0707.2444.

[67] Y. Sun and C-C. Yang, On the connectivity of the Julia set of a finitely generated rational semigroup, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 130, No. 1, 49–52, 2001.

[68] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, The Collected Papers of Teiji Takagi, Iwanami Shoten Pub. pp 5-6 (1973).

[69] 山口昌哉, 畑政義, 木上淳, 「フラクタルの数理」, 岩波講座応用数学, 岩波書店, 1993.

[70] W. Zhou and F. Ren, The Julia sets of the random iteration of rational functions, Chinese Sci. Bulletin, **37**(12), 1992, 969–971.

(2007 年 8 月 31 日提出) (すみ　ひろき・大阪大学理学部数学教室)