# カオスとフラクタルの体験

角　大輝（すみ　ひろき）

京都大学大学院人間・環境学研究科

共生人間学専攻数理科学講座

**E-mail: sumi@math.h.kyoto-u.ac.jp**

研究室: 人間・環境学研究科棟２階231号室

http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~sumi/index-j.html

## 第一部：力学系理論とカオス：カオス音楽

参考書:「カオス力学系入門」R. Devaney著、第２版 新訂版、国府・木坂・新居・石井訳、共立出版 (2003)

「複雑系のカオス的シナリオ」金子・津田著、朝倉書店

# 1　力学系理論とカオス

集合 $X$ の上の変換装置 $f: X \to X$(関数のようなもの）を1つ用意する。初期値 $z_0 \in X$ をとったあと、漸化式

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

できまる点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がどのような振る舞いをするか調べたい。このような分野を離散力学系という。生物の個体数増減モデルなどで用いられる。

$f$ と初期値 $z_0$ の組み合わせによっては、$z_n$ らのふるまいに予測不可能とも思える複雑な動きがある。それを

「カオス」（混沌）

ということがある。

初期値 $z_0$ をとって、そのあと第 $n$ 項 $z_n$ らを音符にする。

$z \in [0,1], a \in [0,4]$ に対して、

$$g_a(z) = az(1-z)$$

とおく。

$a$ は分岐パラメータと呼ばれる。

## 2　1つの2次多項式の独奏

$X=[0,1],\ f(z)=g_4(z)$ とおき、$X$ 上で漸化式

$$z_{n+1}=f(z_n),\ \text{ただし}\, z_0\in X,$$

を考える。初期値 $z_0$ が $0.1$ のとき、第 $n$ 項 $z_n$ らのふるまいはカオス的。$[0,1]$ を15等分して、ドレミファソラシドレミファソラシドと割り振る。第 $n$ 項の値をその割り振りにしたがって音符に変換する。時刻 $n$ にその音符を演奏することにより、楽譜ができる。
音楽自体も、カオス的。

# 3　４つの２次多項式の合奏

次に、$4$ つの2次多項式力学系による合奏を考える。（よって4パートある。）（動物の合唱のモデルに使えるかもしれない。）各パートが勝手に動いているだけでは面白くないので、各パートは、全体の音のフィードバックを加味することとする。

$h_1(z) = g_4(z)$,
$h_2(z) = g_4(z)$,
$h_3(z) = g_{1+\sqrt{5}}(z)$,
$h_4(z) = g_{1+\sqrt{5}}(z)$ とおく。

$X = [0,1]^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, \dots, x_4 \in [0,1]\}$ とおく。
$0 < b < 1$ を一つ固定。

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4$ に対して、

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_1(x_1) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_2(x_2) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_3(x_3) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_4(x_4) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

とおいて、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \dots, f_4(x_1, x_2, x_3, x_4))$$

とおく。 そして、$X = [0,1]^4$ 上で漸化式

$$z_{n+1} = f(z_n), \text{ただし}\, z_0 \in X,$$

を考える。つまり、各パートは、

「自分の音を $1-b$, 全体の平均の音を $b$」

の割合で聞いて次の音を決める。

$b$ を同期パラメータという。これが大きいと各パートが同期しやすいと考えられる。

$[0,1]$ を 15 等分してドレミファソラシドレミファソラシドと振っておき、時刻 $n$ での各パートの値をそれぞれ音符に変えて、4 パートの合奏曲を作る。

- 第 1 パートはパンフルート、
- 第 2 パートはフルート（高音)、
- 第 3 パートはベース、
- 第 4 パートはビブラフォーン。

(1) $b=0.1$, 初期値$(0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4) \in [0,1]^4$のとき。あまり同期しないで各パートがばらばらに動く。第1、第2パートはカオス的、第3、第4パートは周期2の楽譜に近い(が完全にそうでもなくちょっと揺らいでいる)。

(2) $b=0.7$, 初期値は(1)と同じ。各パートの同期が激しい。

(3) $b=0.4$, 初期値は(1)と同じ。各パートは、ばらばらではなく、かといって全パートが同期するというわけでもない。第3、第4パートが同期。第1パート、第2パートは違う動き。

# 4　第一部のまとめ

- 一つの関数または変換装置 $f$ を繰り返すことで予測不能とも思える複雑な動きが現れることがある。これをカオスという。

- カオス性を音楽にして聞いてみることができる。

- 上の音楽でいくつかのパートを用意して、各パートに相互作用を持たせると、

  (1) 同期がなくばらばらだったり、

  (2) 全パートが同期したり、

  (3) 同期する部分とそうでない部分が現れたり、

  パラメータにより様々である。

# 第二部: フラクタル図形と<br>フラクタル次元

参考書:「フラクタルの数理」山口・畑・木上著、
岩波講座応用数学

# 5　フラクタル図形

自然界の「形」に目を凝らす。

細部を拡大すると全体と似る（自己相似性とよばれる。）

という特徴を持つ複雑な図形がわりと多くある。
例: 樹木、カリフラワー、雲（の境界)、海岸線、山肌、・・・

このような「細部を拡大すると全体と似る複雑図形」を

フラクタル（図形）

ということがある。「フラクタル」とは、「砕けた」を意味する造語。その研究は１９７０年代半ばからようやく盛んになった。（それ以前はなめらかな図形を多く扱っていた。)


(株)西川
アコム
アコム
武富士

# 6　自己相似集合

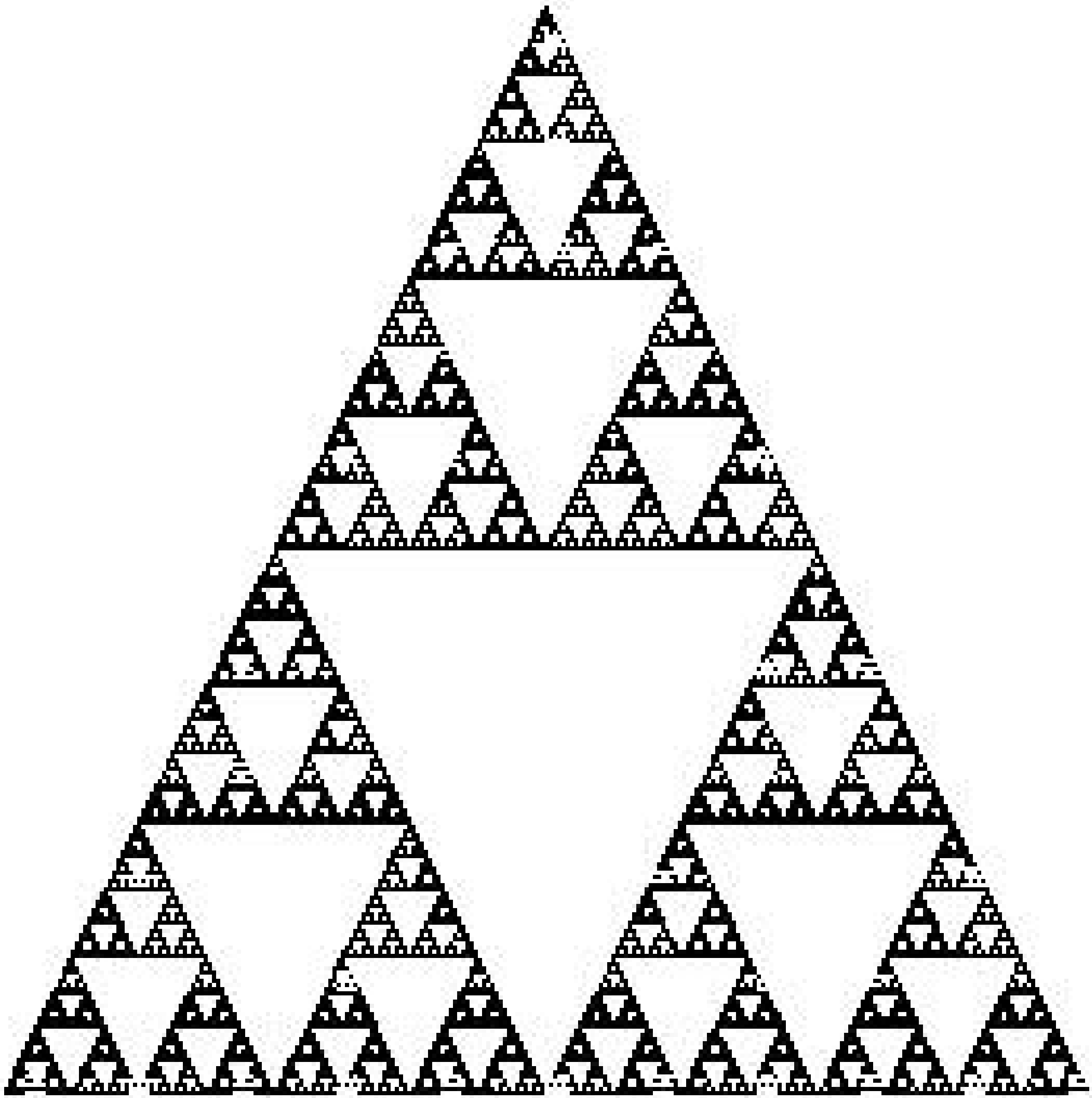
細部を拡大すると全体と似る性質（自己相似性）を持つ図形を描くためのモデルを数学的に作ってみよう。(コンピュータで絵が描ける。)

ここにいくつかの縮小コピー変換 $f_1, \ldots, f_m$ がある。
これらは、平面（または空間）上のある点を中心にして、
何倍かに縮小する操作を表す。

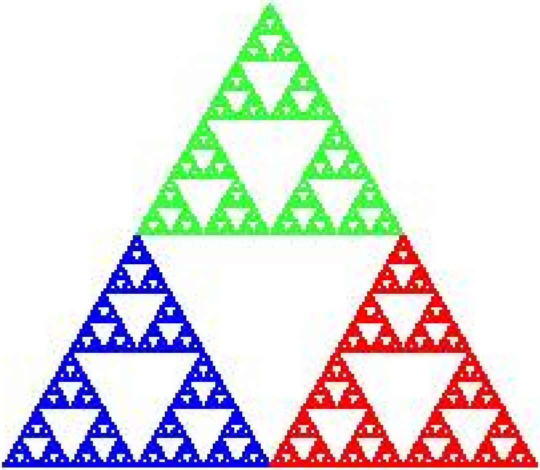
（有界で、境界まで含んだ）図形 $X$ が、

$X$ は、$f_j$ で $X$ をうつしたもの $(j = 1, \ldots, m)$ たちの合併になっている（式でかくと $X = f_1(X) \cup \cdots \cup f_m(X)$）

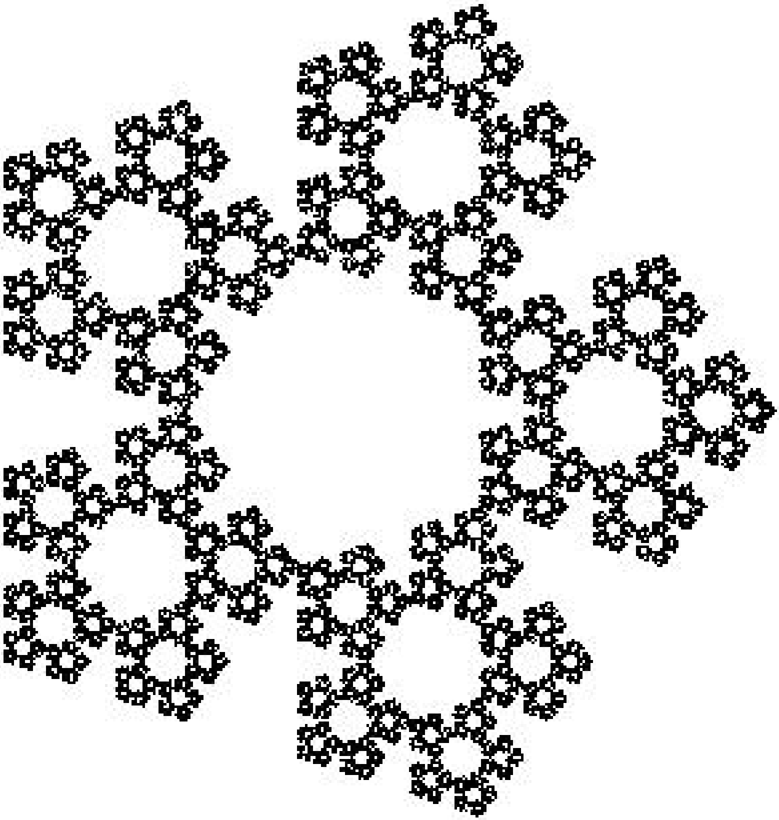
という性質を満たすとき、$X$ を「$\{f_1, \ldots, f_m\}$ によってつくられる自己相似集合」という。



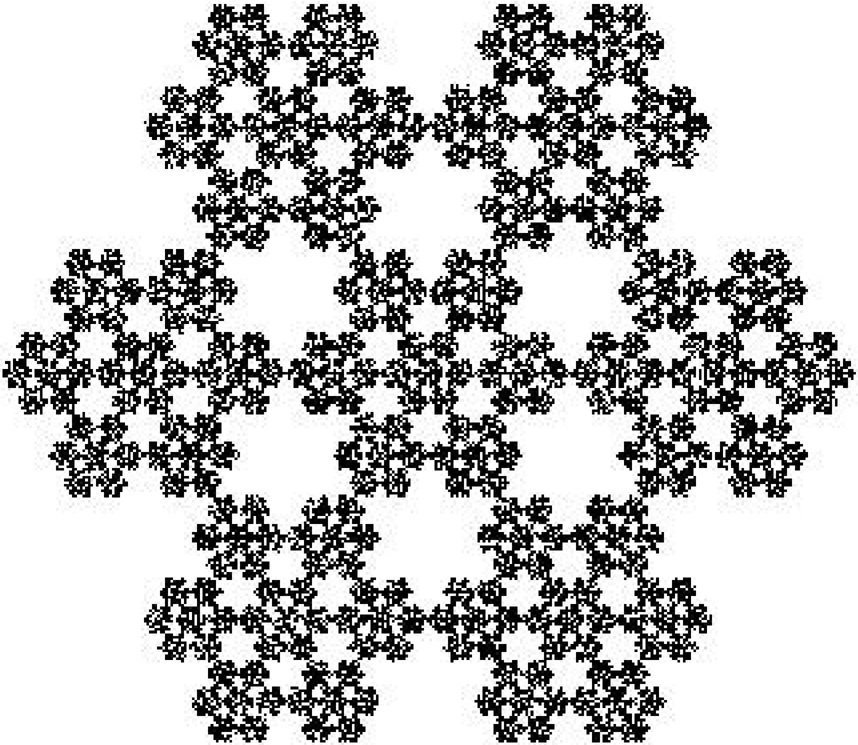
シルピンスキーガスケット



シルピンスキーガスケット(全体をXとおく。)



Pentakun (ペンタクン)



雪片集合

"Analysis on Fractals"
(木上 淳 著 Cambridge Univ. press)



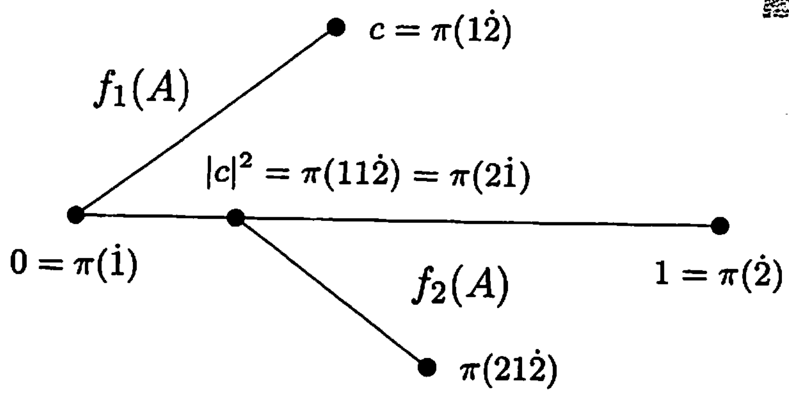



Fig. 1.3. Hata's tree-like set; $f_1(A) \cup f_2(A)$

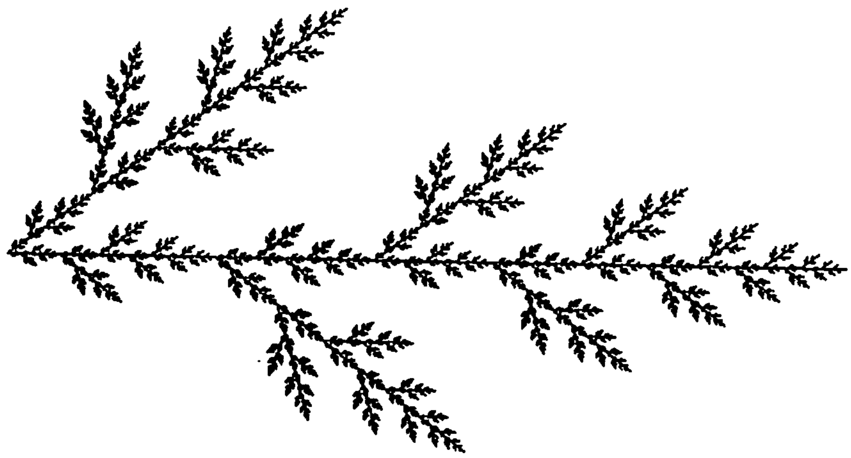
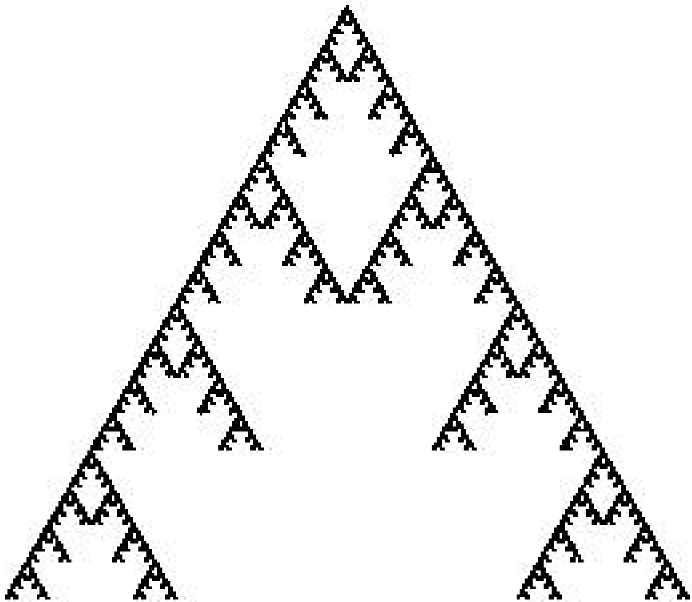


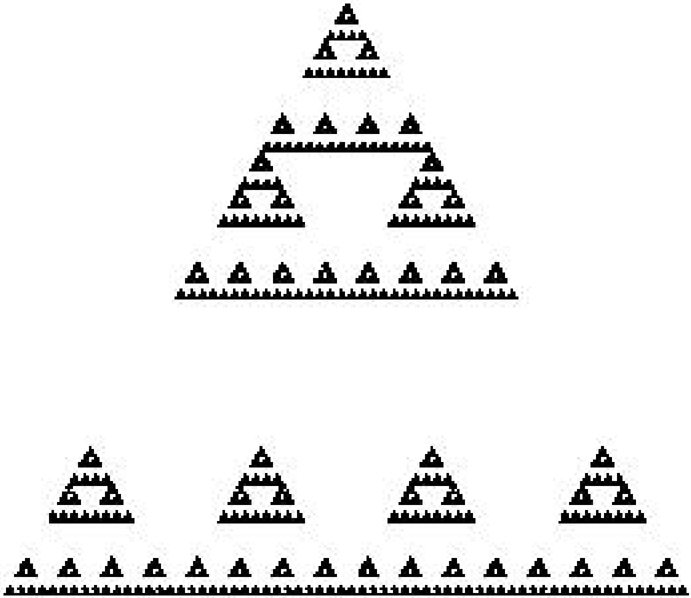
Fig. 1.4. Hata's tree-like set($c = 0.4 + 0.3\sqrt{-1}$)

$0 \leq t \leq 1\} \cup \{tc, 0 \leq t \leq 1\}$. Then it follows that $f_1(A) \cup f_2(A) \supset A$. Hence if $A_m = \cup_{w \in W_m} f_w(A)$, then $\{A_m\}_{m \geq 0}$ is an increasing sequence and $K = \overline{\cup_{m \geq 0} A_m}$. Also we can easily observe that $f_1(K) \cap f_2(K) = \{|c|^2\}$, $f_1(0) = 0, f_2(1) = 1$ and $f_1(f_1(1)) = f_2(0) = |c|^2$. Hence $\pi^{-1}(0) = \{\dot{1}\}$, $\pi^{-1}(1) = \{\dot{2}\}$, $\pi^{-1}(c) = \{1\dot{2}\}$ and $\pi^{-1}(|c|^2) = \{11\dot{2}, 2\dot{1}\}$. See Figure 1.3. Moreover, if $\pi(\omega) = \pi(\tau)$ and $\omega \neq \tau$, there exists $w \in W_*$ such that $\{\omega, \tau\} = \{w11\dot{2}, w2\dot{1}\}$.

## 1.3 Self-similar structure

From the viewpoint of analysis, only the topological structure of a self-similar set is important. For example, suppose you want to study analysis on the Koch curve. Recalling Example 1.2.7, there exists a natural homeomorphism between [0, 1] and the Koch curve. Through this homeomorphism, any kind of analytical structure on [0, 1] can be translated to its





# 7　ハウスドルフ次元

フラクタル図形の大きさをはかるちょうどいいものさしを探したい。（１次元ものさしの長さではかると$\infty$で、２次元ものさしの面積ではかると$0$, そのような図形に対して、

$t$次元ものさし（$1 < t < 2$）

というのはどうか？）

- 図形の長さは、図形を小片にわけ、それらの直径を足し合わせてはかる（その小片の大きさを小さくしていく）。
- 図形の面積は、図形を小片にわけ、それらの直径の２乗を足し合わせてはかる。
- 図形の体積は、図形を小片にわけ、それらの直径の３乗を足し合わせてはかる。

では、$0$以上の任意の実数$t$に対して、「$t$次元ものさし」を、

- 図形を小片にわけ、それらの直径の$t$乗を足し合わせてはかる（その小片の大きさを小さくしていく）。

というものとする。図形$Y$の$t$次元ものさしによる大きさを$H^t(Y)$とかく。

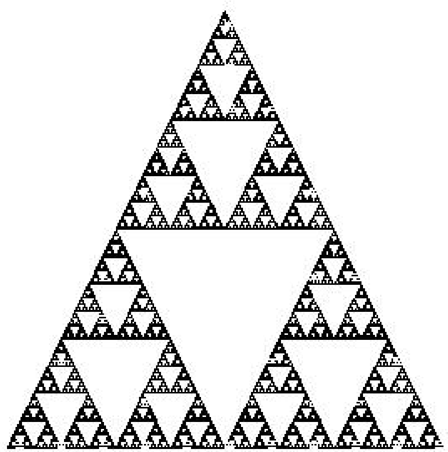
- $H^t(Y)$の性質:
$t$を$0$から大きくしていくと、ある時点$t_0$未満では$\infty$.
その$t_0$を超えるとずっと$0$.

つまり、$Y$の大きさをはかるには、その$t_0$による$t_0$次元ものさしがちょうどよい。
この$t_0$を図形$Y$の「ハウスドルフ次元」という。

# 8　ハウスドルフ次元の計算例:

平面に三点 $p_1, p_2, p_3$ があり、これらは正三角形をなすとする。$p_j$ を中心とする $1/2$ 縮小変換を $f_j$ とかく $(j = 1, 2, 3)$. $\{f_1, f_2, f_3\}$ によって作られる自己相似集合 $X$ をシルピンスキーガスケットという。$X$ のハウスドルフ次元を $s$ とする。

図1　シルピンスキーガスケット



$X$ は、３つの$1/2$縮小変換の像の合併である。
2つの像の交わりは１点であり、その $H^s$ の値は $0$ である。
かつ $X$ に$1/2$縮小変換をほどこすと、$H^s$ の値はもとの $(1/2)^s$ 倍になる。これらのことから、

$$H^s(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X).$$

いま $0 < H^s(X) < \infty$ がわかる(ここは難。説明略。）ので、

$$1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

これより、

$$X\text{のハウスドルフ次元} = s = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58\cdots (\text{非整数!})$$

# 9　フラクタル次元

ハウスドルフ次元と同様の「次元」がいくつか考えられており、それらを総称して「フラクタル次元」ということがある。それらは、一般に、非整数となりうる。

- フラクタル次元が $1$ と $2$ の間の図形たちについては、次元が大きいほど、複雑と思われる。

さまざまな研究例:

- マンガの図柄のフラクタル次元が起承転結とともにどう変化するか。(高校生による研究。)
- オケラの巣穴のフラクタル次元の雄雌での違い、住んでいる場所での違い。

# 10　第二部のまとめ

- 自然界には「細部を拡大すると全体と似る」複雑図形が多くある。それらを「フラクタル図形」という。

- フラクタル図形の数学的モデルとして、相似縮小変換の組による、「自己相似集合」が考えられる。

- フラクタル図形の大きさをはかるものとして、$t$次元ものさし($t$は任意の実数)があり、それがちょうどいい具合になる$t$を図形の「ハウスドルフ次元」とよぶ。これは一般には非整数になりうる。ほかにも同様の次元があり、それらを「フラクタル次元」という。