カオスとフラクタルの体験

角　大輝（すみ　ひろき）
京都大学総合人間学部 認知情報学系 数理情報論および
同大学院人間・環境学研究科 共生人間学専攻 数理科学講座
E-mail: sumi@math.h.kyoto-u.ac.jp
研究室: 人間・環境学研究科棟２階231号室
http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~sumi/index-j.html

第一部：力学系理論とカオス：カオス音楽

参考書:「カオス力学系入門」R. Devaney著、第２版 新訂版、
国府・木坂・新居・石井訳、共立出版 (2003)
「複雑系のカオス的シナリオ」金子・津田著、
朝倉書店

1　力学系理論とカオス

集合 X の上の変換装置 $f : X \to X$(関数のようなもの）を1つ用意する。初期値 $z_0 \in X$ をとったあと、漸化式

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

できまる点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がどのような振る舞いをするか調べたい。このような分野を離散力学系という。生物の個体数増減モデルなどで用いられる。

f と初期値 z_0 の組み合わせによっては、z_n らのふるまいに予測不可能とも思える複雑な動きがある。それを

「カオス」（混沌）

ということがある。

初期値 z_0 をとって、そのあと第 n 項 z_n らを音符にする。

$z \in [0,1], a \in [0,4]$ に対して、

$$g_a(z) = az(1-z)$$

とおく。

a は分岐パラメータと呼ばれる。

2　1つの２次多項式の独奏

$X=[0,1],\ f(z)=g_4(z)$ とおき、X 上で漸化式

$$z_{n+1}=f(z_n),\ \text{ただし}\, z_0\in X,$$

を考える。初期値 z_0 が 0.1 のとき、第 n 項 z_n らのふるまいはカオス的。$[0,1]$ を15等分して、ドレミファソラシドレミファソラシドと割り振る。第 n 項の値をその割り振りにしたがって音符に変換する。時刻 n にその音符を演奏することにより、楽譜ができる。

音楽自体も、カオス的。

次のウェブページに音源がある：

https://soundcloud.com/hiroki-sumi-51792968/chaosdokuso1

3　４つの２次多項式の合奏

次に、4 つの2次多項式力学系による合奏を考える。（よって4パートある。）（動物の合唱のモデルに使えるかもしれない。）各パートが勝手に動いているだけでは面白くないので、各パートは、全体の音のフィードバックを加味することとする。

$h_1(z) = g_4(z)$,
$h_2(z) = g_4(z)$,
$h_3(z) = g_{1+\sqrt{5}}(z)$,
$h_4(z) = g_{1+\sqrt{5}}(z)$ とおく。

$X = [0,1]^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, \ldots, x_4 \in [0,1]\}$ とおく。
$0 < b < 1$ を一つ固定。

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4$ に対して、

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_1(x_1) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_2(x_2) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_3(x_3) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) := (1-b) \cdot h_4(x_4) + b \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} h_j(x_j),$$

とおいて、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \ldots, f_4(x_1, x_2, x_3, x_4))$$

とおく。そして、$X = [0,1]^4$ 上で漸化式

$$z_{n+1} = f(z_n), \text{ただし } z_0 \in X,$$

を考える。つまり、各パートは、

「自分の音を $1-b$, 全体の平均の音を b」

の割合で聞いて次の音を決める。

b を同期パラメータという。これが大きいと各パートが同期しやすいと考えられる。

$[0,1]$ を15等分してドレミファソラシドレミファソラシドと振っておき、時刻 n での各パートの値をそれぞれ音符に変えて、4パートの合奏曲を作る。

- 第1パートはパンフルート、
- 第2パートはフルート（高音)、
- 第3パートはベース、
- 第4パートはビブラフォーン。

(1) $b = 0.1$,　初期値 $(0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4) \in [0,1]^4$ のとき。各パートがばらばらに動く。第1、第2パートはカオス的、第3、第4パートは周期 2 の楽譜に近い（が少し揺らぐ）。

音源ウェブページ：　https://soundcloud.com/hiroki-sumi-51792968/chaosgasso1

(2) $b = 0.7$, 初期値は (1) と同じ。全パートの同期が激しい。

音源ウェブページ：　https://soundcloud.com/hiroki-sumi-51792968/chaosgasso2

(3) $b = 0.4$, 初期値は (1) と同じ。各パートがばらばらに動くわけではないが、全パートが同期するわけでもない。第3、第4パートが同期。第1、第2パートは違う動き。

音源ウェブページ：https://soundcloud.com/hiroki-sumi-51792968/chaosgasso3

エントロピー　物事が時間とともに変化するシステムの複雑さをはかる量として、「エントロピー」というものがある。以下の2種類のシステムにおいてエントロピーがどういう値になるかをみる。

(1) (独立同分布) 考えているものの状態の種類が $1, \dots, N$ の N 種類あり、毎回、考えているものが状態 i を取る確率（統計を取った出現する確率）が前回の状態によらず p_i のとき、このシステムのエントロピーは、

$$-\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i.$$

(2) (マルコフ連鎖）考えているものの状態の種類が $1, \ldots, N$ の N 種類あり、毎回、考えているものが状態 i であることから、次回に状態 j に変化する確率が p_{ij} であるとする。

そして、統計をとり、状態 i が出現する確率が q_i であるとする。このとき、システムのエントロピーは、

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

エントロピーが高いほどシステムが複雑だと考えられる。音楽、言語、文章、対話、動物の鳴き声等のエントロピーが研究されている。ジュウシマツについて、エントロピーが高い歌を歌うオスほどメスにもてる（つまり複雑な歌を歌うオスほどメスにもてる）という研究がある。

4　第一部のまとめ

- 一つの関数または変換装置 f を繰り返すことで予測不能とも思える複雑な動きが現れることがある。これをカオスという。

- カオス性を音楽にして聞いてみることができる。

- 上の音楽でいくつかのパートを用意して、各パートに相互作用を持たせると、

  (1) 同期がなくばらばらだったり、

  (2) 全パートが同期したり、

  (3) 同期する部分とそうでない部分が現れたり、

  パラメータにより様々である。

第二部: フラクタル図形と フラクタル次元

参考書:「フラクタルの数理」山口・畑・木上著、
岩波講座応用数学

5　フラクタル図形

自然界の「形」に目を凝らす。

細部を拡大すると全体と似る（自己相似性とよばれる。）

という特徴を持つ複雑な図形がわりと多くある。
例: 樹木、カリフラワー、雲（の境界）、海岸線、山肌、・・・

このような「細部を拡大すると全体と似る複雑図形」を

フラクタル（図形）

ということがある。「フラクタル」とは、「砕けた」を意味する造語。その研究は１９７０年代半ばからようやく盛んになった。（それ以前はなめらかな図形を多く扱っていた。）


(株)西川
アコム
アコム
武富士

6 自己相似集合

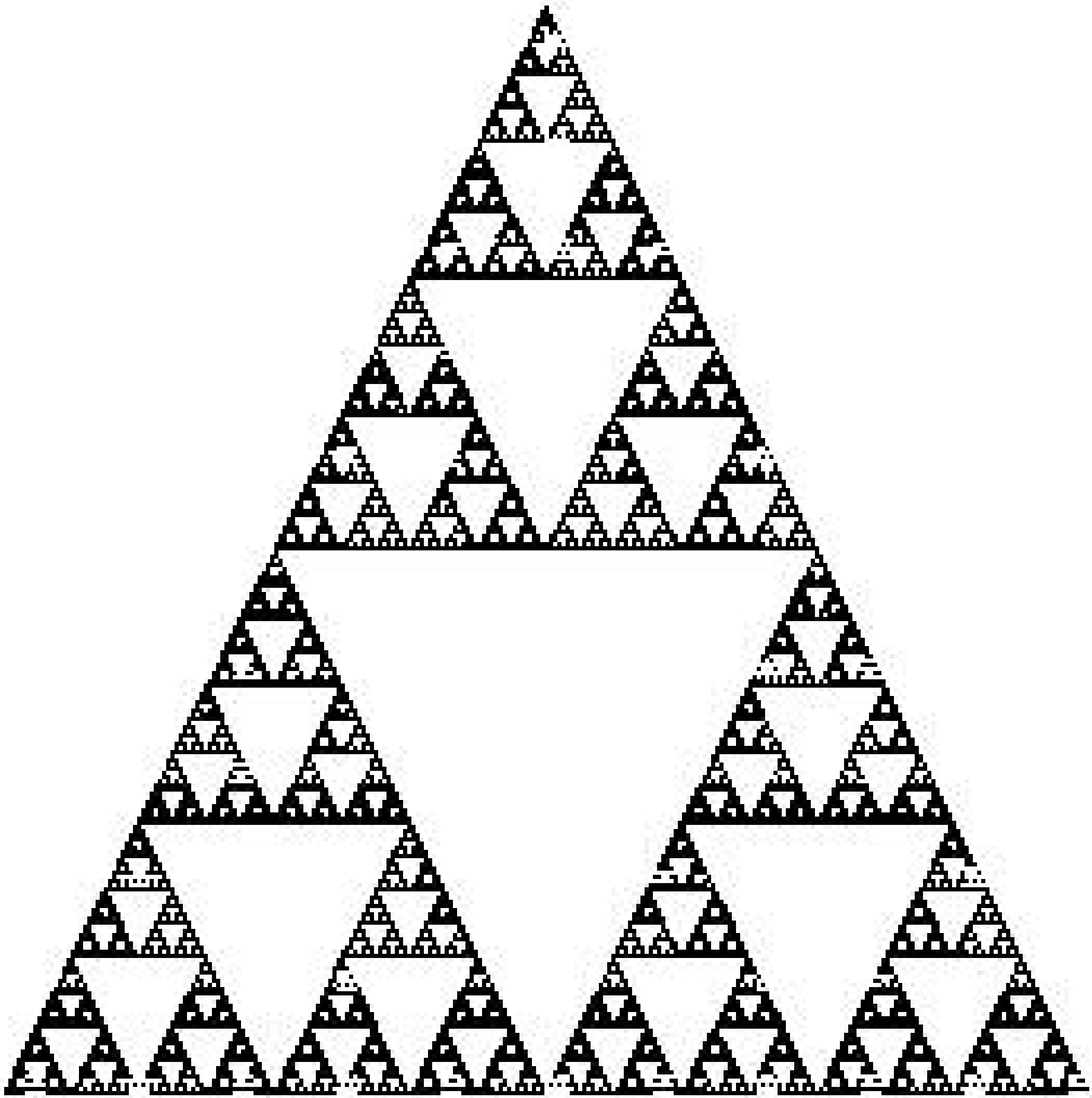
細部を拡大すると全体と似る性質（自己相似性）を持つ図形を描くためのモデルを数学的に作ってみよう。(コンピュータで絵が描ける。)

ここにいくつかの縮小コピー変換 $f_1, \ldots, f_m$ がある。
これらは、平面（または空間）上のある点を中心にして、何倍かに縮小する操作を表す。

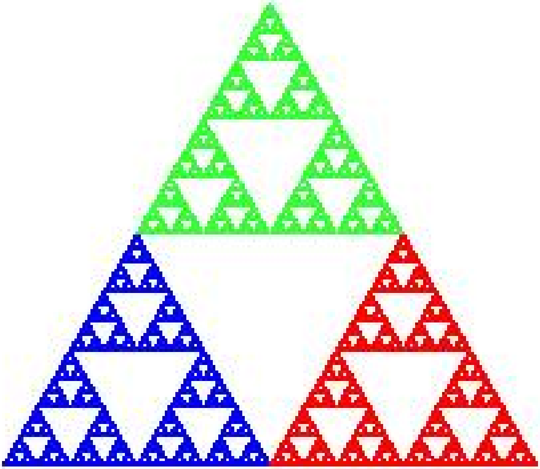
（有界で、境界まで含んだ）図形 X が、

X は、f_j で X をうつしたもの $(j = 1, \ldots, m)$ たちの合併になっている（式でかくと $X = f_1(X) \cup \cdots \cup f_m(X)$）

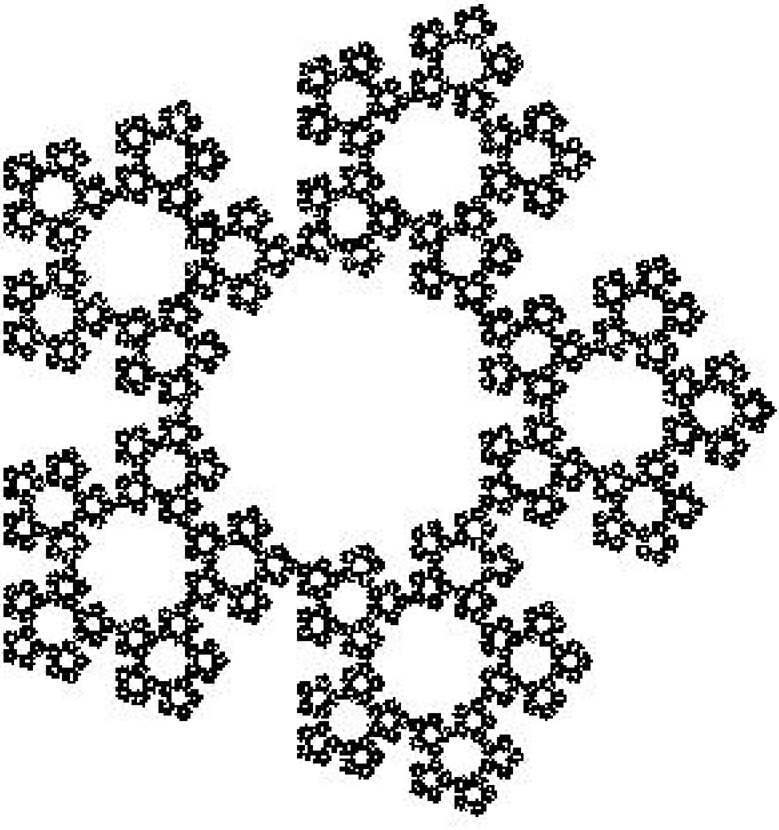
という性質を満たすとき、X を「$\{f_1, \ldots, f_m\}$ によってつくられる自己相似集合」という。



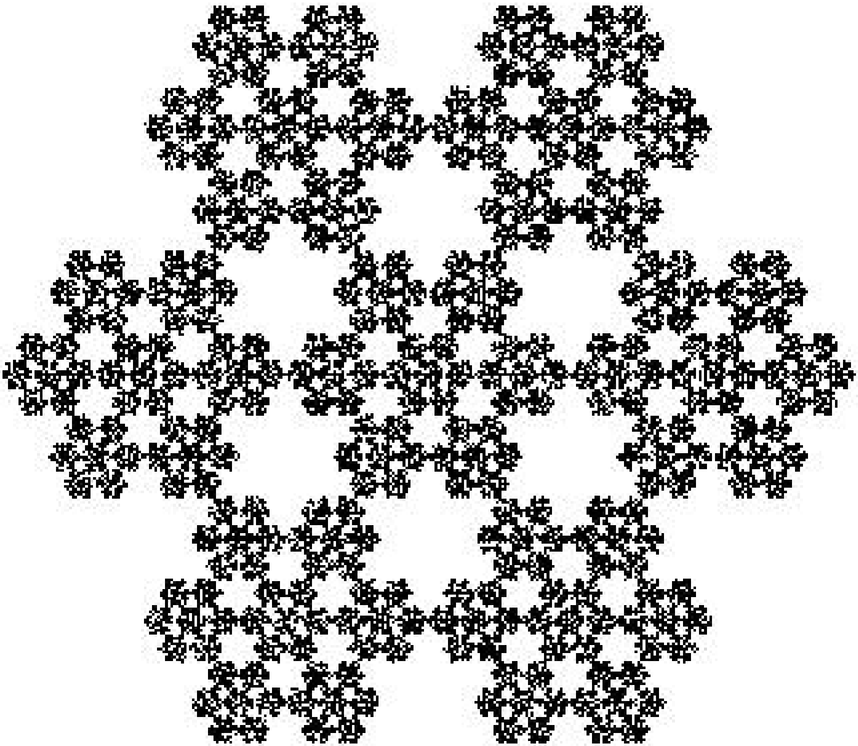
シルピンスキーガスケット



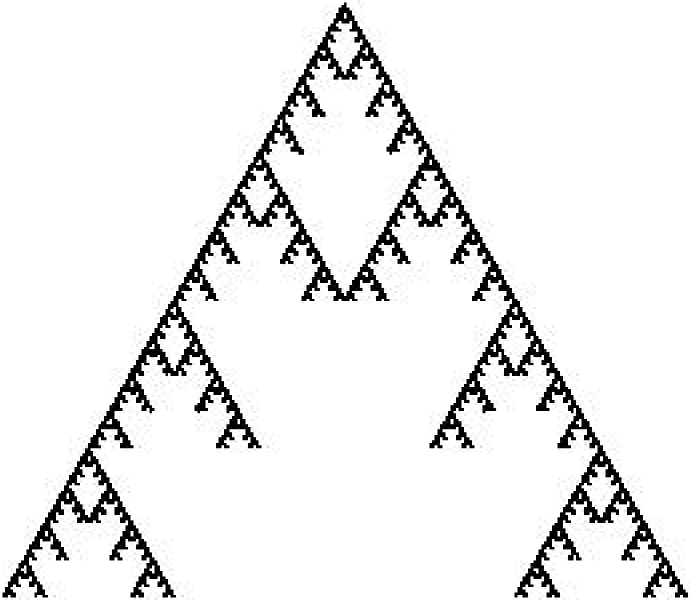
シルピンスキーガスケット(全体をXとおく。)

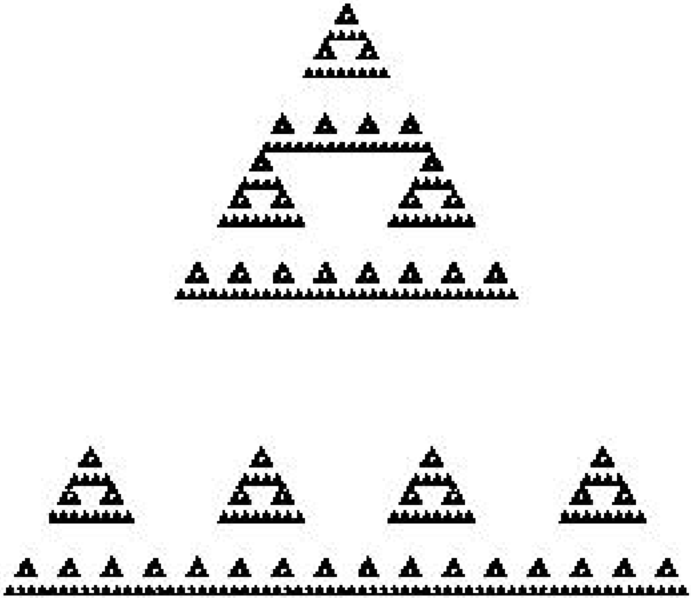


Pentakun (ペンタクン)



雪片集合





7　ボックス次元

X を xyz 空間または xy 平面の中の（有界な）図形とする。
$N_\varepsilon(X)$ を、「xyz 空間（または xy 平面)の各座標軸を ε の幅で切って、立方体たち(または正方形たち）を作ったとき、そのうちで X と交わるものの数」とする。

- X が1次元の線分のときには、
  $N_\varepsilon(X)$ は ε^{-1} に（大体）比例する。
- X が2次元の正方形のときには、
  $N_\varepsilon(X)$ は ε^{-2} に（大体）比例する。
- X が3次元の立方体のときには、
  $N_\varepsilon(X)$ は ε^{-3} に（大体）比例する。

上の話をもとにして、一般の X に対し、
もしある定数 $C>0$, ある定数 $s \geq 0$ によって

$$☆ \quad N_\varepsilon(X) \sim C\varepsilon^{-s} \text{ つまり } \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{N_\varepsilon(X)}{C\varepsilon^{-s}} = 1$$

となるならば、s を X のある種の「次元」といいたい。
ちなみに☆のとき、「対数」を考えれば

$$\log N_\varepsilon(X) - \log C + s \log \varepsilon \to 0 \ (\varepsilon \to 0)$$

なので、

$$☆☆ \quad s = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N_\varepsilon(X)}{-\log \varepsilon}$$

となる。そこで、☆☆の右辺の極限が存在するとき、
その極限値を $\dim_B(X)$ と書いて、X のボックス次元という。

実際の（自然界の、実社会の）図形 X のコピーを方眼紙にうつし（縮小コピーでボックス次元は変わらない）、方眼紙の目の細かさ ε ごと（ただし有限個の $\varepsilon = a_1, a_2, \ldots, a_r$ についてでしかできないが）に $N_\varepsilon(X)$ を考え、

横軸に $-\log \varepsilon$, 縦軸に $\log N_\varepsilon(X)$ を取って、
$\varepsilon = a_1, a_2, \ldots, a_r$ らについてのプロットした点たちの「点のグループとしての傾き」を最小二乗法ではかる。
その傾きを X のボックス次元とする。

上記は各人で r や $a_1, a_2, \ldots, a_r$ の取り方が違うので気を付けないといけないが、ある人が、これこれの ε たちについて、このようにボックス次元を調べる、と宣言すれば、同じ方法で調べたデータについては、その中で比べることについては少なくとも意味がある。

8　ハウスドルフ次元

フラクタル図形の大きさをはかるちょうどいいものさしを探したい。（１次元ものさしの長さではかると ∞ で、２次元ものさしの面積ではかると 0, そのような図形に対して、

$$t\text{次元ものさし}\ (1 < t < 2)$$

というのはどうか？）

- 図形の長さは、図形を小片にわけ、それらの直径を足し合わせてはかる（その小片の大きさを小さくしていく）。
- 図形の面積は、図形を小片にわけ、それらの直径の２乗を足し合わせてはかる。
- 図形の体積は、図形を小片にわけ、それらの直径の３乗を足し合わせてはかる。

では、0以上の任意の実数tに対して、「t次元ものさし」を、

- 図形を小片にわけ、それらの直径のt乗を足し合わせてはかる（その小片の大きさを小さくしていく）。

というものとする。図形Yのt次元ものさしによる大きさを$H^t(Y)$とかく。

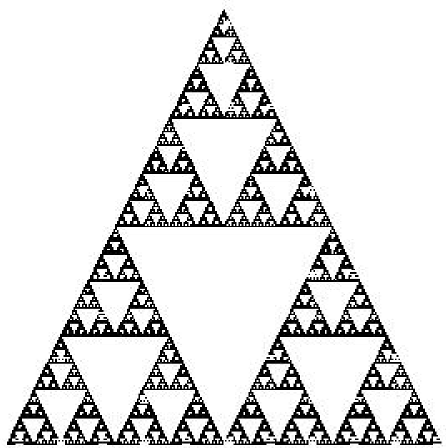
- $H^t(Y)$の性質:
  tを0から大きくしていくと、ある時点t_0未満では∞.
  そのt_0を超えるとずっと0.

つまり、Yの大きさをはかるには、そのt_0によるt_0次元ものさしがちょうどよい。
このt_0を図形Yの「ハウスドルフ次元」という。

9　ハウスドルフ次元の計算例:

平面に三点p_1, p_2, p_3があり、これらは正三角形をなすとする。p_jを中心とする$1/2$縮小変換をf_jとかく$(j = 1, 2, 3)$. $\{f_1, f_2, f_3\}$によって作られる自己相似集合Xをシルピンスキーガスケットという。Xのハウスドルフ次元をsとする。

図1　シルピンスキーガスケット



Xは、３つの$1/2$縮小変換の像の合併である。
2つの像の交わりは１点であり、そのH^sの値は0である。
かつXに$1/2$縮小変換をほどこすと、H^sの値はもとの$(1/2)^s$倍になる。これらのことから、

$$H^s(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(X).$$

いま$0 < H^s(X) < \infty$がわかる(ここは難。説明略。）ので、

$$1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

これより、

$$X\text{のハウスドルフ次元} = s = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58\cdots(\text{非整数!})$$

10　フラクタル次元

ボックス次元、ハウスドルフ次元と同様の「次元」がいくつか考えられており、それらを総称して「フラクタル次元」ということがある。それらは、一般に、非整数となりうる。

- フラクタル次元が 1 と 2 の間の図形たちについては、次元が大きいほど、複雑と思われる。

さまざまな研究例:

- マンガの図柄のフラクタル次元が起承転結とともにどう変化するか。(高校生による研究。)
- オケラの巣穴のフラクタル次元の雄雌での違い、住んでいる場所での違い。

11　第二部のまとめ

- 自然界には「細部を拡大すると全体と似る」複雑図形が多くある。それらを「フラクタル図形」という。

- フラクタル図形の数学的モデルとして、相似縮小変換の組による、「自己相似集合」が考えられる。

- フラクタル図形の大きさをはかるものとして、t 次元ものさし (t は任意の実数) があり、それがちょうどいい具合になる t を図形の「ハウスドルフ次元」とよぶ。これは一般には非整数になりうる。ほかにも同様の次元があり、それらを「フラクタル次元」という。