I

物理の数理

1. 力　　学

1-2 ソリトン

1-2-1 ソリトンの発見 1)~3)

ソリトン（soliton）は 1960 年代に登場した概念であるが，その研究の前史は 1830 年代にまで遡る．当時船舶工学に携わっていたスコット・ラッセル（J. Scott-Russel）は運河で引き船の舳先から離れて一定の形と速度で進む孤立波（solitary wave）を目撃したことをきっかけとしてその研究に取り組み，孤立波の波形や進行速度を与える実験式を見出した．この成果はストークス（G.G. Stokes）らの注目を集めて非線形波動の研究を促すことになった．その後，ブシネ（V.J. Boussinesq）やコルテヴェーグ（D.J. Korteweg）とド・フリーズ（G. de Vries）がラッセルの実験式を説明するモデル方程式を提案し，孤立波の実験式をモデル方程式の厳密解によって裏付けたり，楕円函数によって表される周期的解を見出したりするなど，一定の成果をあげた．残念ながら，このような非線形偏微分方程式を扱う一般的な手法が未発達な当時の状況では，それ以上の詳しい解析は困難だった．

1960 年代にソリトン理論が誕生することを可能にした新たな方法の一つがコンピュータによる数値計算である．ソリトンはコンピュータによる数値計算を通じて見出されたのだが，その先駆けの役を果たしたのが 1950 年代にフェルミ（E. Fermi）・パスタ（J.R. Pasta）・ウラム（S.M. Ulam）が非線形格子振動に関して行った数値計算である．その結果は予想に反するもので，通常期待されるエルゴード的振る舞いとは全く異なる再帰現象（recurrence phenomenon）を示していた．ザブスキー（N.J. Zabusky）とクラスカル（M.D. Kruskal）はフェルミ・パスタ・ウラムの数値計算を連続体に対して実行することを考えて，そのモデルとして非線形格子の連続体極限でもあるコルテヴェーグとド・フリーズの方程式（KdV 方程式）

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

を取り上げた（ここで添字は偏導函数 $u_t = \partial u/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xxx} = \partial^3 u/\partial x^3$ を表す）．数値計算の結果はここでも予想外のものだった．すなわち，初期波形からある時間が経過したときそれまで存在しなかった孤立波の列が出現し，それらの孤立波は互いに衝突しながらも個性を保ち続けた．ザブスキーとクラスカルはこれらの孤立波を，安定な粒子のように振る舞う，という意味でソリトンと命名した．

1-2-2 逆散乱法とラックス表示 1)~3)

相互作用するソリトンの系を厳密解として求める試みは KdV 方程式の解（の符号を逆にしたもの）をポテンシャルとする 1 次元シュレディンガー方程式

$$(-\partial_x^2 - u)\psi = E\psi \tag{1.2}$$

（$\partial_x = \partial/\partial x$）の散乱問題との思いがけない関係を明らかにした [11]．それによれば，複数のソリトンが共存する多重ソリトン解（multi-soliton solution）は散乱が起こらない無反射ポテンシャル（reflectionless potential）と呼ばれるものであり，個々のソリトンはこの特殊なポテンシャルにおける 2 乗可積分な固有状態（すなわち束縛状態）に対応する．ソリトンの個数を N とすれば，多重ソリトン解は

$$u = 2\partial_x^2 \log f \tag{1.3}$$

で与えられる．ここで f は

$$f = \det\Bigl(\delta_{ij} + \frac{\sqrt{c_i c_j}}{\kappa_i + \kappa_j} e^{(\eta_i(t)+\eta_j(t))/2}\Bigr) \tag{1.4}$$

という N 次行列式である．c_j, κ_j は定数，$\eta_j(t)$ はそれを用いて表される 1 次式 $\eta_j(t) = 2\kappa_j x - 8\kappa_j^3 t$ を表す．κ_j 同士は相異なるとする．$N = 2$ の場合にこの解を調べれば，確かに 2 個のソリトンが粒子性を保ちつつ衝突する様子が再現されていることがわかる（図 2-1）．

KdV 方程式とシュレディンガー方程式のこの関係は遠方で十分速く減少する一般の解に対しても成立する．そのような解 u には $-u$ をポテンシャルとする散乱問題によって散乱データ（scattering data）$\{\kappa_j, c_j, r(k)\}$ が定まる．κ_j, c_j は多重ソリトン解の表示にも現れた束縛状態のデータであり，$r(k)$ は平面波 e^{ikx}（$k^2 = E$）の散乱状態の反射係数（reflection coefficient）である．元のポテンシャルがこれらの散乱データからある線形積分方程式を解くことによって復元できることは 1950 年代に知られていた．このことを KdV 方程式の解法に利用する．その際に鍵となるのは，u の複雑な時間発展とは対照的に，これらの散乱データが単純な（本質的に線形の）時間発展則

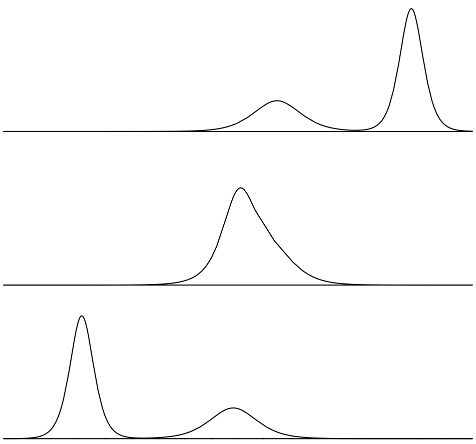

図 2-1　2 個のソリトンの衝突（下段は衝突前，中段は衝突中，上段は衝突後を示す）

$$\kappa_j(t) = \kappa_j,\ c_j(t) = c_j e^{-8\kappa_j^3 t},$$
$$r(k,t) = r(k) e^{-8ik^3 t} \tag{1.5}$$

に従う，という事実である．この散乱データから前述の積分方程式によって対応するポテンシャルを求めれば，それが KdV 方程式の解を与えることになる．これが逆散乱法（inverse scattering method）である．特に $r(k) = 0$ の場合には積分方程式は代数方程式に帰着し，それを解くことによって前述の多重ソリトン解が得られる．

この解法はその後まざまな方程式に拡張されることになるが，いずれの場合も出発点となるのがラックス形式（Lax form）あるいはラックス表示（Lax representation）と呼ばれる方程式の表現形式である．KdV 方程式のラックス表示は

$$L_t = [M, L] \tag{1.6}$$

というラックス方程式（Lax equation）の形で与えられる[12]．ここで L, M は

$$L = \partial_x^2 + u, \quad M = -4\partial_x^4 - 6u\partial_x - 3u_x$$

という微分演算子であり，$[M, L]$ はその交換子 $ML - LM$ を表す．L は散乱問題に現れたシュレディンガー演算子と本質的に同じものである．具体的に計算してみれば，この方程式が KdV 方程式と同値であることがただちに確かめられる．

ラックス方程式は固有値問題

$$L\psi = \lambda\psi \tag{1.7}$$

の固有値（正確にはスペクトル）が時間に依らず一定に保たれることを表している．実際，固有函数を

$$\psi_t = M\psi \tag{1.8}$$

という方程式によって時間発展させればラックス方程式から $\lambda_t = 0$ が従う．逆に，λ を定数として ψ に対するこれらの線形微分方程式が両立すれば，そこからラックス方程式が従う．このようにラックス方程式は固有値問題の等スペクトル変形（isospectral deformation）を定める方程式と解釈できる．特に，固有値問題のスペクトルで表せる量は系の保存量となる．たとえば，KdV 方程式のソリトン解のパラメータ κ_j は散乱問題における固有状態の固有値と $E = -\kappa_j^2$ という関係にあるので保存量である．逆散乱法において散乱データが単純な時間発展則に従うこともラックス方程式の等スペクトル性からの帰結として理解できる．

KdV 方程式が多数の保存量をもつことはラックス表示が登場する以前からある程度わかっていたが，ラックス表示（あるいはそれに付随する固有値問題）を用いることによって保存量を系統的に構成することが可能になった．その結果として，KdV 方程式には無限個の独立な保存量が存在することが確認された[13]．このことの意義は古典的な可積分力学系の概念との比較によって明らかになる．

1-2-3　保存量と可積分性 [2)~5)]

19 世紀後半，ヤコビ（C.G.J. Jacobi）の力学研究を受け継ぐように可積分力学系の理論が華開いた．その基礎となったのは 1850 年代にリウヴィル（J. Liouville）が打ち出したハミルトン系の可積分性の概念である．リウヴィルは当時までに知られていたケプラー運動，オイラー（L. Euler）・ラグランジュ（J.L. Lagrange）のコマの運動，ヤコビの研究した 2 次曲面上の測地運動などの求積（quadrature）によって解ける力学系がいずれも保存量をもつことに注目した．一般に，ハミルトン系が自由度と同じ個数の函数的に独立な保存量 $F_1, \ldots, F_N$ をもち，かつそれらが包合的（involutive）すなわちポアソン括弧に関して可換（$\{F_j, F_k\} = 0$）であるとき，リウビルの意味で可積分であるという．リウビルはそのような力学系が求積可能であることを示したのである．その後間もなく，可積分力学系の新たな例としてノイマン（C. Neumann）の質点運動が見出された．その後も世紀の変わり目までにコワレフスカヤ（S. Kovalevskaya）の剛体運動やキルヒホフ（G. Kirchhoff）・クレプシュ（R. Clebsch）の理想流体中の剛体運動などの可積分力学系の発見が続いた．

KdV 方程式が無限個の保存量をもつことは明らかにリウヴィルの観点に通じるものである．また，逆散乱法において散乱データが単純な時間発展則に従うことは可積分力学系の作用・角変数（action-angle variable）の性質を連想させる．このような類推が実際に正しいことは，1970 年代初めに KdV 方程式を無限自由度のハミルトン系として定式化すること

によって確かめられた[14),15)]．KdV 方程式などのハミルトン系としての定式化は変分形式（variational form）

$$u_t = P\frac{\delta H}{\delta u} \tag{1.9}$$

に基づく．ここでハミルトニアン H は汎函数

$$H = \int_X h(u, u_x, u_{xx}, \ldots)dx$$

（X は考えている座標空間）であり，$\delta H/\delta u$ はその変分導函数（variational derivative）

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial h}{\partial u} - \partial_x \frac{\partial h}{\partial u_x} + \partial_x^2 \frac{\partial h}{\partial u_{xx}} - \cdots$$

を表す．P は微分演算子で，u の任意の汎函数 F, G に対して

$$\{F, G\} = \int_X \frac{\delta F}{\delta u} P \frac{\delta G}{\delta u} dx \tag{1.10}$$

がポアソン括弧の性質をもつように選ばれる．KdV 方程式の場合には

$$P = \partial_x, \quad H = \int_X (\frac{1}{2}u_x^2 - u^3)dx$$

と選べる．さらに $H_1 = -H/4$ に始まる独立で包合的な汎函数の系列 H_n（$n = 1, 2, \ldots$）が存在する．特にこれらは KdV 方程式の保存量を与える．

これらの H_n をハミルトニアンとして時間発展を考えることもできる．包合性によってこれらの時間発展は互いに可換であり，それぞれに独立の時間変数 t_n を用意して連立系

$$u_{t_n} = P\frac{\delta H_n}{\delta u} \tag{1.11}$$

として扱うことができる．個々の方程式は KdV 方程式と同様のラックス表示

$$L_{t_n} = [M_n, L] \tag{1.12}$$

をもつ．ここで M_n は $2n+1$ 階の微分演算子で，$[M_n, L]$ が 0 階の微分演算子となるように選ばれる．この連立方程式系を KdV 階層（KdV hierarchy），個々の方程式を高次 KdV 方程式（higher KdV equation）という．

ゲルファント（I.M. Gelfand）とディキー（L.A. Dikii）は 1970 年代半ばに一連の研究[16)]を行って，前述の微分演算子 M_n が L の分数べき $L^{n+1/2}$ から微分演算子の部分を取り出したもの $(L^{n+1/2})_+$ で与えられることを見出し，それに対応する高次ハミルトニアン H_n の正体も明らかにした．ちなみに，この分数べきを扱うために当初は微分演算子のスペクトル解析の手法が援用されたが，後に代数的な擬微分演算子による定式化がそれに取って代わった[17)~19)]．H_n はゲルファント・ディキー多項式と呼ばれる u とその導函数の多項式 $R_n = R_n(u, u_x, u_{xx}\ldots)$ によって

$$H_n = \int_X \frac{2R_n}{n+1/2}dx \tag{1.13}$$

と表される．R_n は $R_0 = 1$ から出発して

$$\partial_x R_{n+1} = (\frac{1}{4}\partial_x^3 + u\partial_x + \frac{1}{2}u_x)R_n \tag{1.14}$$

という一種の漸化式（R_{n+1} を決める際に余分な積分定数はすべて捨てる）によって順次

$$R_1 = \frac{u}{2}, \quad R_2 = \frac{1}{8}u_{xx} + \frac{3}{8}u^2, \quad \ldots$$

というように求められる．

1-2-4　さまざまな方程式・手法[1)~3),5)]

1970 年代半ばを過ぎる頃には KdV 方程式と同様の性質をもつ方程式が数多く知られるようになった．これらの方程式を総称してソリトン方程式（soliton equation）と言う．ソリトン理論の初期から知られている代表的なソリトン方程式には戸田格子（Toda lattice）の運動方程式

$$q(s)_{tt} = e^{q(s-1)-q(s)} - e^{q(s)-q(s+1)}, \tag{1.15}$$

サイン・ゴルドン方程式（sine-Gordon equation）

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \tag{1.16}$$

変型 KdV 方程式（modified KdV equation）

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \tag{1.17}$$

非線形シュレディンガー方程式（nonlinear Schrödinger equation）

$$iu_t = -u_{xx} \pm |u|^2 u \tag{1.18}$$

などがある．物理的に見れば，戸田格子（戸田盛和によって 1960 年代に見出された[20)]）は非線形格子の一種であり，サイン・ゴルドン方程式と非線形シュレディンガー方程式は 1 次元伝導体・固体物理・非線形光学などに応用をもつ．他方，数学ではサイン・ゴルドン方程式がそのベックルンド変換（Bäcklund transformation）とともに 19 世紀の曲面論においてすでに知られていた．変形 KdV 方程式はミウラ変換（Miura transformation）と呼ばれる従属変数の変換 $u = v_x - v^2$ によって KdV 方程式と結ばれているが，そのことが KdV 方程式とシュレディンガー方程式との関係の発見につながった[11)]．

これらはいずれも時間 1 次元，空間 1 次元の方程式である（このことをしばしば「$1+1$ 次元の方程式」と言う）．戸田格子の場合には整数に値をとる格子座標 s が空間変数の役割を果たしている．戸田格子は s に関する差分演算子（あるいはそれと同等な無限次元行列）を用いて KdV 方程式と同様のラックス方程式の形に表せる[39),40)]．変形 KdV 方程式・サイン・ゴルドン方程式・非線型シュレディンガー方程式はスペクトルパラメータ（spectral parameter）と呼ばれる補助的パラメータ z の多項式または有理式からなる 2×2 行列 $L=L(z)$, $M=M(z)$ によって零曲率方程式（zero-curvature equation）

$$L_t - M_x + [L,M] = 0 \tag{1.19}$$

の形に表せる[21)~23)]．方程式をこの形に表すこともラックス表示と呼ばれる．これらの表示によって KdV 方程式と同様の取り扱いが可能になる．

KP 方程式（Kadomtsev-Petviashvili equation）

$$3u_{yy} + (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 0 \tag{1.20}$$

別名 2 次元 KdV 方程式は $1+2$ 次元の代表的なソリトン方程式である．u が y に依存しない場合には，x に関して 1 回積分して積分定数を u に繰り込む（さらに t を $-4t$ に置き換える）ことによって，この方程式は KdV 方程式に帰着する．実際の経緯は逆であって，空間的に 1 次元の KdV 方程式に対して横方向（そちらに y 軸を選ぶ）の広がりを入れてその効果を調べる，という動機のもとで直観的にこの形が選ばれたのである．したがってじつは幸運な偶然だったとも言えるのだが，この方程式は

$$L = \partial_x^2 + u, \quad M = \partial_x^3 + \frac{3u}{2}\partial_x + v$$

という微分演算子を用いて零曲率方程式

$$L_t - M_y + [L,M] = 0 \tag{1.21}$$

の形に表示され（v を消去することによって前述の u に対する方程式となる），一般化された逆散乱法などによって解くことができる[24)]．さらに，KdV 方程式を特殊化として含むだけでなく，u が t に依存しない場合は y を時間変数と見なせばブシネ方程式（の特別な場合）にもなっている．このように KP 方程式は複数の方程式を特殊化として含むという意味でより普遍的な存在である．

戸田格子とサイン・ゴルドン方程式を統合することによって別の型の普遍的ソリトン方程式も見出せる．サイン・ゴルドン方程式の空間に依存しない解は

$$u_{tt} = -\sin u$$

という方程式に従うが，これは単振り子の方程式に他ならない．これをヒントにして戸田格子の方程式で ∂_t^2 を $\partial_t^2 - \partial_x^2$ に置き換えれば

$$\phi(s)_{tt} - \phi(s)_{xx} + e^{\phi(s)-\phi(s-1)} - e^{\phi(s+1)-\phi(s)} = 0 \tag{1.22}$$

という 2 次元場の方程式が得られる（便宜上，粒子の変位座標 $q(s)$ の符号を逆にしたものを場の変数 $\phi(s)$ に読み替えた）．t,x の代わりに $\xi=(t+x)/2$, $\eta=(t-x)/2$ を用いてこの方程式を

$$\phi(s)_{\xi\eta} + e^{\phi(s)-\phi(s-1)} - e^{\phi(s+1)-\phi(s)} = 0 \tag{1.23}$$

と表すこともできる．これは戸田場の方程式（Toda field equation）あるいは 2 次元戸田方程式（two-dimensional Toda equation）と呼ばれ，

$$L = \exp(\partial_s) + b(s), \quad M = c(s)\exp(-\partial_s)$$

という形の差分演算子を用いて零曲率方程式

$$L_\eta - M_\xi + [L,M] = 0 \tag{1.24}$$

の形に表せる．ここで $b(s), c(s)$ は

$$b(s) = \phi(s)_\xi, \quad c(s) = e^{\phi(s)-\phi(s-1)}$$

と選ばれている．これによって戸田場の方程式もソリトン理論のさまざまな方法で扱うことができる[25),26)]．$\phi(s)$ が s に関して 2 周期的すなわち $\phi(s+2)=\phi(s)$ が成立する場合には，$\phi(1)=-\phi(0)=iu/2$ と選ぶことによってサイン・ゴルドン方程式が導かれる．このようにさまざまな方程式を特殊化として含むという意味で，この方程式も KP 方程式と同様の普遍的性格をもつ．

このように取り扱い可能な方程式が増えるにつれて，それらを扱う数学的手法も多彩なものになった．その中で特筆すべきものとしては，2×2 行列型の散乱問題に基づく逆散乱法[23)]，伝統的な逆散乱法に代わる解法としてリーマン・ヒルベルト問題（Riemann-Hilbert problem）を用いる方法[27)]，有限帯ポテンシャル（finite-band potential）や準周期的解（quasi-periodic solution）に対する代数幾何学的方法[28),29)]，双線形化（bilinearization）によって直接的に解を構成する方法[30)] などが掲げられる．さらに，1970 年代末にはソリトン方程式とパンルベ方程式（Painlevé equation）との関連が見出された[31)~33)]．

1-2-5 双線形化法[6)]

双線形化法は従属変数の変換によって方程式を双線形形式（bilinear form）に書き換えて逆散乱法などを介さず直接的に解を求める方法であり，広田の直接法（Hirota's direct method）とも呼ばれる．こ

の方法は解の間の変換（ベックルンド変換）を求めたり新しい方程式を発見したりすることなどにも用いられている．

KdV 方程式・KP 方程式はともに

$$u = 2\partial_x^2 \log f \tag{1.25}$$

という従属変数の変換によって双線形化される．この u の表示を KdV 方程式に代入し，x に関して 1 回積分して積分定数を f に繰り込めば

$$(D_tD_x + D_x^4)f\cdot f = 0 \tag{1.26}$$

という双線形方程式が得られる．ここで広田の双線形演算子

$$\begin{aligned}&P(D_x, D_t)f\cdot g\\ &= P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_t - \partial_{t'})f(x,t)g(x',t')|_{x'=x,t'=t}\end{aligned}$$

を用いた．KP 方程式の場合には上の u の表示を代入して x に関して 2 回積分し，積分定数を繰り込むことによって

$$(3D_y^2 - 4D_tD_x + D_x^4)f\cdot f = 0 \tag{1.27}$$

という双線形方程式が得られる．f が y に依存しない場合には，t を $-4t$ に置き換えることによって，この方程式は KdV 方程式の双線形形式に帰着する．

戸田格子・戸田場の方程式も同様にして双線形化される．戸田場 $\phi(s)$ に対して

$$\phi(s) = \log\frac{f(s+1)}{f(s)} \tag{1.28}$$

という従属変数の変換を行えば

$$\Bigl(\frac{1}{2}D_\xi D_\eta + \exp(D_s)\Bigr)f(s)\cdot f(s) = 0 \tag{1.29}$$

という双線形方程式が得られる．ここで $\exp(D_s)$ は

$$\exp(D_s)f(s)\cdot g(s) = f(s+1)g(s-1)$$

という双線形演算子を表す．この双線形方程式に対して $D_\xi D_\eta \to -D_t^2$ という置き換えを行えば戸田格子の双線形形式になる．

サイン・ゴルドン方程式は戸田場の方程式の特別な場合なので $f(0), f(1)$ によって双線形化されることになる．それとは仕組みが異なるが，変形 KdV 方程式と非線形シュレディンガー方程式も 2 個の従属変数 f, g を用いて連立双線形方程式に書き直される．

双線形化法が開発された当初は，解を

$$f = 1 + f_1 + f_2 + \cdots$$

という形に仮定して $f_1, f_2, \ldots$ を順次決めて行く，という素朴な方法で解を求めることが行われた．双線形方程式が

$$P(D_x, D_y, D_t)f\cdot f = 0$$

という形に表されていれば $f_1, f_2, \ldots$ に対する方程式は

$$\begin{aligned}&P(\partial_x, \partial_y, \partial_t)f_1 = 0,\\ &2P(\partial_x, \partial_y, \partial_t)f_2 + P(D_x, D_y, D_t)f_1\cdot f_1 = 0,\ \ldots\end{aligned}$$

というように実質的に線形になる．多重ソリトン解を求めるには f_1 を指数函数の定数係数線形結合に選ぶ（そこに含まれる指数函数の個数 N がソリトンの個数になる）．このとき $f_2, f_3, \ldots, f_N$ も指数函数で表され，$f_{N+1} = \cdots = 0$ となることがわかる．このようにして多重ソリトン解を求めることは実際には非常に煩雑である．今日ではソリトン解が行列式やパフ式（Pfaffian）の形に表せることが経験的・理論的に知られており，行列式やパフ式の満たす恒等式に基づく見通しのよい計算法が開発されている．

双線形化された KP 方程式のソリトン解は

$$f = \det\Bigl(\delta_{ij} + \frac{c_j}{p_i - q_j}e^{\eta_j}\Bigr) \tag{1.30}$$

という N 次行列式の形にまとめられる．ここで η_j は

$$\eta_j = (p_j - q_j)x + (p_j^2 - q_j^2)y + (p_j^3 - q_j^3)t$$

という形の 1 次式である．c_j, p_j, q_j は定数で，$p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$, $p_i \neq q_j$ とする．p_j, q_j を $q_j = -p_j = \kappa_j$ と選べば f は y に依存せず，t を $-4t$ に置き換えれば KdV 方程式に対して逆散乱法で求めたソリトン解と同じものになる．

上と同じ行列式において η_j を

$$\eta_j = s\log(p_j/q_j) + (p_j - q_j)\xi + (p_j^{-1} - q_j^{-1})\eta$$

に置き換えたものは双線形化された戸田場の方程式のソリトン解を与える．p_j, q_j を $q_j = p_j^{-1} = \kappa_j$ と選べば，$\xi = -\eta = t$ を時間変数とする戸田格子のソリトン解が得られる．

1-2-6 KP 階層 [7)]

KdV 階層と同様に，KP 方程式に対しても可換な高次時間発展からなる KP 階層（KP hierarchy）が構成されている [34)]．KdV 階層の構成には元の KdV 方程式の従属変数 u で十分であるが，KP 階層の構成には無限個の従属変数 $u_2, u_3, \ldots$ が必要になる．これらの従属変数は

$$L = \partial_x + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\partial_x^{-n+1} \tag{1.31}$$

という形の擬微分演算子（pseudo-differential operator）の係数として導入される．

一般に ∂_x の負べきも含む函数係数線形結合

$$P = \sum_{n=-\infty}^{m} p_n \partial_x^n$$

を擬微分演算子と呼ぶ．ここでは擬微分演算子を函数などに作用する本当の「演算子」とは考えず，お互いの間で和や積などの演算が定義される抽象的「シンボル」として扱う．微分演算子の場合にならって m を階数（order）という（ただし $p_m \neq 0$ とする）．擬微分演算子同士の積は一般化されたライプニッツ公式

$$p\partial_x^n \cdot q\partial_x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} pq^{(k)} \partial_x^{n+m-k} \tag{1.32}$$

$(q^{(k)} = \partial_x^k q)$ に従って定義される．ただし 2 項係数は $n < 0$ の場合も意味をもつように

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と解釈する．

このような擬微分演算子の代数は KdV 階層の定式化にも利用できる．実際，$\partial_x^2 + u$ の分数べき $(\partial_x^2 + u)^{1/2}$ をこの意味での擬微分演算子と考えれば，係数はある漸化式に従って

$$(\partial_x^2 + u)^{1/2} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} - \frac{u_x}{4}\partial_x^{-2} + \cdots$$

というように順次定まり，u とその導函数の多項式となる．これを $2n+1$ 乗して射影

$$\Big(\sum_{n=-\infty}^{m} p_n \partial_x^n\Big)_+ = \sum_{n=0}^{m} p_n \partial_x^n$$

によって微分演算子の部分を取り出したものが M_n を与える．

KP 階層は $(\partial_x^2 + u)^{1/2}$ を前述の一般的な 1 階擬微分作用素 L に置き換えた形のラックス方程式系

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad B_n = (L^n)_+, \tag{1.33}$$

である．$B_1 = \partial_x$ であるから，t_1 に関するラックス方程式は $L_{t_1} = L_x$ となって，t_1 と x を同一視することができる．そこから先は

$$B_2 = \partial_x^2 + 2u_2,$$
$$B_3 = \partial_x^3 + 3u_2\partial_x + 3u_3 + 3u_{2,x}, \ \ldots$$

で定まる非自明な時間発展が続く．このラックス方程式系から零曲率方程式系

$$B_{m,t_n} - B_{n,t_m} + [B_m, B_n] = 0 \tag{1.34}$$

が従う（実際にはこれから逆にラックス方程式系を導くこともできて，両者は同値である）．$t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$ と見なせば $m = 2$, $n = 3$ に対する零曲率方程式は $1+2$ 次元の KP 方程式に一致する．

2 以上の整数 N を選んで，L^N が微分演算子であること，すなわち $L^N = B_N$ という等式が成立することを付加条件として課せば，$\mathcal{L} = L^N$ の $N-1$ 個の係数を従属変数とするラックス方程式系

$$\mathcal{L}_{t_n} = [B_n, \mathcal{L}], \quad B_n = (\mathcal{L}^{n/N})_+, \tag{1.35}$$

が得られる（$t_N, t_{2N}, \ldots$ に対する時間発展は自明なものになる）．これは KP 階層の N 簡約（N-reduction）あるいは一般化 KdV 階層（genralized KdV hierarchy）と呼ばれる．$N = 2$ の場合には $\mathcal{L} \to L$, $t_{2n+1} \to t_n$, $B_{2n+1} \to M_n$ と読み替えれば KdV 階層と同じものになる．また $N = 3$ の場合にはブシネ方程式の高次時間発展からなるブシネ階層（Boussinesq hierarchy）を与える．このように KP 階層はさまざまなソリトン方程式を特殊化として含むという意味で普遍的な存在である．

KP 階層の解に対して

$$u_2 = (\log\tau)_{t_1t_1},$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(\log\tau)_{t_1t_2} - \frac{1}{2}(\log\tau)_{t_1t_1t_1}, \ \ldots$$

という一連の等式を満たす新たな従属変数 $\tau = \tau(t_1, t_2, \ldots)$（$t_1 = x$）を導入することができる．これはホロノーム量子場（holonomic quantum field）や等モノドロミー変形（isomodromic deformation）の理論において知られていた類似の概念にならって τ 函数（tau function）と呼ばれる．τ 函数は双線形化の従属変数 f を (t_1, t_2, t_3) 以外の変数にも拡張したものに他ならない．KP 階層は τ 函数に対する無限個の広田型双線形方程式の系と同値である．N 簡約の τ 函数は $t_N, t_{2N}, \ldots$ に依存しない．

KP 階層は無限次元のグラスマン多様体（Grassmann manifold）の上の力学系として理解することができる [34),35)]．τ 函数とその導函数（を適当に組み合わせたもの）はこのグラスマン多様体上のプリュッカー座標（Plücker coordinate）と対応している．τ 函数の満たす双線形方程式はプリュッカー座標が満たす一連の代数的関係式から導出される．各プリュッカー座標は行列式として表されるので，τ 函数自体が行列式表示をもつ．たとえば，ソリトン解を含む特殊解の一族として N 個の函数 $f_j = f_j(t_1, t_2, \ldots)$（$t_1 = x$）のロンスキー行列式（Wronski determinan）

$$\tau = \det\Big(\partial_x^{i-1} f_j\Big) \tag{1.36}$$

で与えられる解が知られている．ここで f_j は

$$f_{j,t_n} = \partial_x^n f_j$$

という条件を満たすものとする．この解の族はある無限次元ベクトル空間の N 次元部分空間からなるグラスマン多様体に対応している．この場合のプリュッカー座標は非負整数の増加列 $0 \le k_0 < k_1 < \ldots < k_{N-1} < \infty$ でラベル付けされた行列式 $\det\left(\partial_x^{k_i-1} f_j\right)$ で与えられる．直観的にはこの解の族の $N \to \infty$ における極限として KP 階層の一般解が得られると考えてよい．

グラスマン多様体による解釈と密接に関連するもう一つの解釈として，τ 函数を 2 次元自由フェルミ場（free fermion field）のフォック空間（Fock space）における真空期待値（vacuum expectation value）として表すこと

$$\tau = \langle 0| \, e^{H(t_1,t_2,\ldots)} \, |W\rangle \qquad (1.37)$$

もできる[36]．ここで $H(t_1,t_2,\ldots)$ はフェルミ場のカレント演算子（current operator）の線形結合 $t_1J_1 + t_2J_2 + \cdots$ であり，$\langle 0|$ は真空（vacuum），$|W\rangle$ は解を指定する特別な状態（前述のグラスマン多様体の点に対応する）を表す．この真空期待値表示はアフィンリー代数（affine Lie algebra）などの無限次元リー代数の表現論とも密接に関係する．

ソリトン方程式の普遍的な枠組みは KP 階層だけではない．その一般化・変種として多成分型の KP 階層[34),36)] や B 型・C 型・D 型の KP 階層[37] などが知られている．また，戸田場の方程式に対する KP 階層の類似として戸田階層（Toda hierarchy）も構成されている[38]．既知の多くのソリトン方程式やさまざまな型の特殊解はこれらの普遍的枠組みの中で理解することができる．

1-2-7 その他の話題[8)~10)]

1980 年代初めに KP 階層が導入され，無限次元グラスマン多様体や無限次元リー代数を駆使する研究が進むとともに，ソリトン理論は急速に純粋数学的色彩を深めた．たとえば，1980 年代後半には代数幾何学的問題が取り上げられて，ヤコビ多様体の特徴付けに関する懸案が解決された．また，この頃登場した共形場理論からもその後重要な題材が提供された．これらの成果は 1990 年代に入ってから数理物理のさまざまな問題（弦理論，位相的場の理論，超対称場の理論，ランダム行列など）に応用されて今日に至っている．その中にはパンルベ方程式・等モノドロミー変形との接点も随所に見出せる．

1990 年代以降の研究のもう一つの特徴は差分系や離散系が関心を集めていることにある．さまざまなソリトン方程式に対して差分類似（difference analogue）や離散類似（discrete analogue）が構成できることは 1980 年代の研究の中ですでに知られていたが，その適用範囲がさらに広がってパンルベ方程式などの差分類似も議論されるようになった．これらの差分・離散可積分系の中には量子可積分系や可解格子模型と関わりをもつものもある．他方，ソリトン方程式の独立変数と従属変数の両方を離散化したものとして，さまざまなソリトンセルオートマトン（soliton cellular automaton）が構成され，それらを連続系からの極限として導出する方法として超離散化（ultradiscretization）が開発された．最近ではこれらのセルオートマトンが量子群の表現と関係することも明らかになっている．

参 考 文 献

1) 戸田盛和，非線形波動とソリトン（新版），日本評論社 2000.
2) 和達三樹，非線形波動，岩波講座現代の物理学 14，岩波書店 1992.
3) M.J. アブロビッツ・H. シーガー，ソリトンと逆散乱変換，薩摩順吉・及川正行訳，日本評論社 1991.
4) 大貫義郎・吉田春夫，力学，岩波講座現代の物理学 1，岩波書店 1994.
5) 田中俊一・伊達悦朗，KdV 方程式，紀伊国屋書店 1979.
6) 広田良吾，直接法によるソリトンの数理，岩波書店 1992.
7) 三輪哲二・神保道夫・伊達悦朗，ソリトンの数理，岩波講座応用数学 [対象 4]，岩波書店 1993.
8) 中村佳正編，可積分系の応用数理，裳華房 2000.
9) 野海正俊，パンルヴェ方程式，朝倉書店 2000.
10) 高崎金久，可積分系の世界，共立出版 2001.
11) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1097.
12) P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure. Appl. Math. **21** (1968), 467–490.
13) R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations, II. Esistence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys. **9** (1968), 1204–1209.
14) C.S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, J. Math. Phys. **12** (1971), 1548–1551.
15) L.D. Faddeev, V.E. Zakharov, Korteweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 280–287.
16) I.M. Gelfand, L.A. Dikii, Asymptotic behavior of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-de Vries equation, Russian Math. Surveus **30:5** (1975), 77–113; Fractional powers of operators and Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 259–273.
17) Yu.I. Manin, Algebraic aspects of nonlinear differential equations, J. Soviet Math. **11** (1979), 1–122.
18) M. Adler, On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations, Invent. Math. **50** (1979), 219–248.
19) G. Wilson, On two contructions of conservation laws for Lax equations, Quart. J. Math. Oxford **32** (1981), 491–512.
20) M. Toda, Vibration of a chain with a non-linear interaction, J. Phys. Soc. Japan **22** (1967), 431–436; Wave

propagation in anharmonic lattice, J. Phys. Soc. Japan **23** (1967), 501–596.

21) V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional seflmodulation of waves in nonliear media, Soviet Phys. JETP **34** (1972), 62–69.

22) M. Wadati, The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan **32** (1972), 1681; The modified Korteweg-de Vries equation, ibid **34** (1973), 1289–1296.

23) M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C Newell, H. Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1262–1264.

24) V.E. Zakharov, A.B. Shabat, A scheme for integrating the nonlinear equations of methematical physics by the method of the inverse scattering problem I, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 226–235.

25) A.N. Leznov, M.V. Saveliev, Representation of zero curvature for the system of non-linear partial differential equations $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(kx)_\alpha$ and its integrability, Lett. Math. Phys. **3** (1979), 489–494.

26) A.V. Mikhailov, M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Two-dimensional generalized Toda lattice, Commun. Math. Phys. **79** (1981), 473–488.

27) V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering transform II, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 166–173.

28) B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov, Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties, Russian Math. Surveys **31:1** (1976), 59–146.

29) I.M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the method of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl. **11** (1977), 12–26; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russian Math. Surveys **32:6** (1977), 185–213.

30) R. Hirota, Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, Lect. Notes. Math. **515** (Springer-Verlag, 1976), pp. 40–68.

31) M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type, J. Math. Phys. **21** (1980), 1006–1015.

32) H. Flaschka, A. Newell, Monodromy- and spectrumpreserving deformations I, Commun. Math. Phys. **76** (1980), 65–116.

33) M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, Physica **2D** (1981), 407–448; ditto III, ibid **4D** (1981), 26–46.

34) M. Sato, Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, 数理解析研究所講究録 **439** (1981), 30–46; Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, Lect. Notes. Num. Anal. **5** (Kinokuniya, Tokyo, 1982), pp. 259–271.

35) G.B. Segal, G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. IHES **61** (1985), 5–65.

36) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation theory for soliton equations III, J. Phys. Soc. Japan **50** (1982), 3806–3812.

37) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation theory for soliton equations VI, J. Phys. Soc. Japan **50** (1982), 3813-3818; ditto IV, Physica **4D** (1982), 343-365; ditto V, Publ. RIMS., Kyoto Univ., **18** (1982), 1111–1120.

38) K. Ueno, K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, Advanced Studies in Pure Math. **4** (Kinokuniya, 1984), 1–94

39) H. Flaschka, The Toda lattice I, Existence of integrals, Phys. Rev. **B9** (1974), 1924–1925. The Toda lattice II, Inverse scattering solution, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 703–716.

40) S.V. Manakov, Complete integrabiltiy and stochastization of discrete dynamical systems, Soviet Phys. JETP **40** (1975), 269–274.