The asymmetric exclusion process and random matrix theory

笹本 智弘 (千葉大理学部数学・情報数理)

本講演では, ランダム行列理論に関係する手法を用いて 1 次元非対称排他過程 (ASEP) の時間に依存する揺らぎを調べる研究について述べた.

ASEP とは, 1 次元格子上に体積排除相互作用のある多数の非対称ランダムウォーカーがいるような確率的無限粒子系であり, 単純なモデルであるが, 交通流やメッセンジャー RNA 上のリボゾームの運動を記述するなど, 種々の応用が知られている.

近年このモデルの時間に依存する揺らぎ, 特にある点におけるカレントの揺らぎや, 粒子の位置の揺らぎなどが調べられており, まずその現状について概観した. Johansson に始まる組合せ論的な問題にマップする方法の拡張を用いて種々の場合の揺らぎが調べられて来たことおよびその方法では取扱いが難しい問題 (界面モデルの言葉での平坦初期条件など) に Schütz による遷移確率を書き直した方法が有効である場合がある事について説明した.

その後, 離散時間の TASEP について, 図のような初期条件で右から M 番目の粒子に着目し (tagged particle 問題), その運動について調べた結果 [1] を説明した. 主結果は次のようである. tagged particle が時刻 t までに移動した距離 $L(t)$ の多時刻分布関数は次のような Fredholm 行列式で書ける:

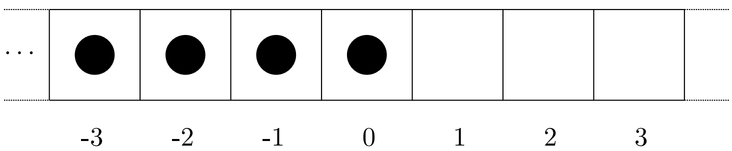
$$\mathrm{Prob}\left(L(t_1) \geq \ell_1, L(t_2) \geq \ell_2\right) = \det\left(1 - K\right),$$

$$K(t_1, x_1; t_2, x_2) = \tilde{K}(t_1, x_1; t_2, x_2) - \phi_{t_1,t_2}(x_1, x_2),$$

$$\tilde{K}(t_1, x_1; t_2, x_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dz dw \frac{1}{z-w} \frac{(1+1/w)^{t_2-M+1}}{(1+1/z)^{t_1-M+1}} \prod_{i=1}^{M} \frac{1-q_i-q_i w}{1-q_i-q_i z} \frac{w^{x_2-l}}{z^{x_1-k+1}},$$

$$\phi_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left(1+\frac{1}{z}\right)^{t_2-t_1} z^{x_2-x_1-l+k-1} & t_1 < t_2 \\ 0 & t_1 \geq t_2 \end{cases}.$$

これは次のようにして得られる. まず, 各時刻において粒子が隣の格子点にホップしようとしたら 0, しようとしなければ 1 を対応させることにより, TASEP の時間発展のサンプルは 01 行列で表せる. 次に 01 行列は双対 RSK 対応と呼ばれるアルゴリズムを用いると 2 つのヤング盤の対と対応するという事実から, tagged particle の運動が確率的に成長するヤング図形の問題に置き換えることが出来る. さらにその時間発展が Schur 過程と呼ばれる性質のよい過程の特別な場合になっていることを用いると上の表式を得る. さらに漸近解析を行うと Airy 過程等が現れることが分かった. 詳細については下の文献 [1] を参照されたい.



参考文献

[1] T. Imamura and T. Sasamoto, Dynamical properties of a tagged particle in the totally asymmetric simple exclusion process with the step-type initial condition, in preparation.