2013年度「確率解析とその周辺」

予稿集

2013年9月20日(金)13:30-- 9月22日(日) 15:50

京都大学総合人間学部棟1階1102室

研究集会「確率解析とその周辺」

平成25年度科学研究費補助金基盤研究(B) 課題番号24340023「無限次元空間上の確率解析」(研究代表者：会田 茂樹), 平成25年度科学研究費補助金基盤研究(C) 課題番号24540170「Dirichlet形式が定める対称拡散過程の局所構造と付随するノイズの研究」(研究代表者：日野 正訓) の援助を受けて, 表記の研究集会を以下の要領で開催致しますのでご案内申し上げます。

日時： 2013年9月20日（金）13:30 〜 9月22日（日）15:50

場所： 京都大学総合人間学部棟1階1102室
〒606-8501 京都府京都市左京区吉田二本松町

ホームページ： `http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~ueki/sa13/SA13.html`

—プログラム—

9月20日(金)

13:30〜14:10　稲浜 譲　(名古屋大学)
Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path

14:20〜15:00　伊藤 悠　(京都大学)
Lyons' extension theorem via fractional calculus

15:10〜15:50　永沼 伸顕　(東北大学)
Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs
driven by fractional Brownian motion

16:10〜16:50　天羽 隆史　(立命館大学)
On the monotonicity of $\mathcal{L}_0$-cost along backward heat flow
(桑田 和正 氏 (お茶の水女子大学) との共同研究)

17:00〜17:40　塩沢 裕一　(岡山大学)
Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs
(Xueping Huang 氏 (Jena大学) との共同研究)

9月21日(土)

10:00〜10:50　楠岡 誠一郎　(東北大学)
ピン止め拡散過程と滑らかさの悪い係数を持つ放物型方程式の基本解のヘルダー連続性

11:00〜11:50　矢野 孝次　(京都大学)

周遊路を結合してできる過程の汎関数極限定理

11:50〜13:30　昼休み

13:30〜14:20　会田 茂樹　(東北大学)

Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces

14:30〜15:20　松本 裕行　(青山学院大学)

Distributions of hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions

15:40〜16:30　谷口 説男　(九州大学)

2 次 Wiener 汎関数について

16:40〜17:30　重川 一郎　(京都大学)

1 次元拡散作用素の固有関数のいくつかの具体例について

9 月 22 日 (日)

10:30〜11:10　山崎 和俊　(関西大学)

Games of singular control and stopping driven by spectrally one-sided Lévy processes
(Daniel Hernández-Hernández 氏 (CIMAT) との共同研究)

11:20〜12:00　道工 勇　(埼玉大学)

ある積分方程式の解の確率表現

12:00〜13:30　昼休み

13:30〜14:10　植村 英明　(愛知教育大学)

Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients
(小川 重義 氏 (立命館大学) との共同研究)

14:20〜15:00　長田 博文　(九州大学)

Stochastic Coulomb systems in infinte-dimensions

15:10〜15:50　三苫 至　(佐賀大学)

Asymptotic expansion of a Gaussian integral of the Chern-Simons Lagrangian

世話人　上木 直昌（京都大学大学院人間・環境学研究科）
日野 正訓（大阪大学大学院基礎工学研究科）
会田 茂樹（東北大学大学院理学研究科）
河備 浩司（岡山大学大学院自然科学研究科）

Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path

Yuzuru Inahama (Nagoya University)

要約　近年 M. Hairer が急速に研究を進めている Hairer 流のラフ確率偏微分方程式 (rough SPDE) 理論の枠組において, Schilder 型の大偏差原理を証明する。ラフパス理論の確率論的部分においては, この種の大偏差原理は中心的な話題であるが, rough SPDE 理論では (いかなる流派においても) 前例がないと思う。Hairer 理論においては, 2 変数ガウス過程を空間変数に関してラフパス持ち上げしたものを空間的ラフパスと呼び, これが主役を演じるのだが, 論文によって, 考える 2 変数ガウス過程が違っている。本講演では, 最も典型的な例である確率熱方程式の解の持ち上げに対して, Schilder 型の大偏差原理を証明する。証明は通常のラフパス理論においてもっとも一般性の高い手法である Friz-Victoir の議論を「2 変数化」することにより与える。

In rough path theory of T. Lyons, the notion of paths is generalized to a great extent and so is that of ordinary differential equations. They are called rough paths and rough differential equations (RDEs), respectively. The solution map of an RDE is called an Itô map, which is defined for every rough path and, moreover, is continuous with respect to the topology of rough path space (Lyons' continuity theorem). As a result, stochastic differential equations (SDEs) in the usual sense are made deterministic or "dis-randomized".

Even though Itô maps are deterministic, the probabilistic aspect of the theory is still very important undoubtedly. In a biased view of the author, a large deviation principle of Schilder type is a central issue in stochastic analysis on rough path spaces. This kind of large deviations was first shown by Ledoux, Qian, and Zhang (2002) for the law of Brownian rough path. Combined with Lyons' continuity theorem, this result immediately recovers well-known Freidlin-Wentzell type large deviations for solutions of SDEs. Since then many papers have been published on this subject.

Naturally, one would like to apply rough path theory to stochastic PDEs. There have been some successful attempts. In this paper, we focus on M. Hairer's theory [1, 3, 4], which is based on M. Gubinelli's "algebraic" rough integration theory. In Hairer's theory, rough path theory is used for the space variable $x \in S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ for each fixed time variable $t > 0$. This is surprising because almost everyone regarded solutions of stochastic PDEs as processes indexed by the time-variable t that take values in function spaces of the space-variable x and then modify and apply infinite dimensional rough path theory. Not only his point of view is novel, but his theory also turned out to be very powerful when he rigorously solved KPZ equation in the periodic case for the first time [2].

Under these circumstances, it seems natural and necessary to develop stochastic analysis in this framework. In this paper we will prove a large deviation principle of Schilder type for the spatial lift of the (scaled) solution ψ of the stochastic heat equation on S^1. This process ψ plays a crucial role in [3, 4]. To our knowledge, a large deviation principle is new in rough stochastic PDE theories of any kind.

Now we introduce our setting. Let us recall the stochastic heat equation on S^1. As usual $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ is regarded as $[0, 1]$ with the two end points identified and $\triangle = \triangle_{S^1}$ stands for the periodic Laplacian. Let $\xi^i = \xi(t, x)^i$ $(1 \le i \le d)$ are independent copies of the space-time white noise associated with $L^2([0, T] \times S^1)$ with the (formal) covariance $\mathbb{E}[\xi(t, x)^i \xi(s, y)^j] = \delta_{ij} \cdot \delta_{t-s} \cdot \delta_{x-y}$. Let $\psi = \psi(t, x)$ be a unique solution of the following $\mathbf{R}^d$-valued stochastic PDE.

$$\partial_t \psi = \triangle_x \psi + \xi \qquad \text{with} \qquad \psi(0, x) \equiv 0.$$

Then, $\psi = (\psi(t, x))_{0 \le t \le T, 0 \le x \le 1}$ is a two-parameter continuous Gaussian process. It was shown in [3] that, (i) for each t, $x \mapsto \psi(t, x)$ admits a natural lift to a geometric rough path $(x, y) \mapsto \Psi(t; x, y)$ a.s. and (ii) there exists a modification of Ψ such that $t \mapsto \Psi(t; \bullet, \star)$ is continuous in the geometric rough path space a.s. In Hairer's theory, a solution of a rough stochastic PDE is obtained as a continuous image of Ψ. Therefore, it is important to analyze (the law of) Ψ.

Let $1/3 < \alpha < 1/2$. We denote by $G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ the α-Hölder geometric rough path space over $\mathbf{R}^d$. The first level path of $X \in G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ is a usual path in $\mathbf{R}^d$ which starts at 0. Let $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d) \cong \mathbf{R}^d \times G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ be the α-Hölder geometric rough path space in an extended sense so that information of the initial values of the first level paths are added. For each t, the random variable $\Psi(t; \bullet, \star)$ takes values in this Polish space $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Let $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d) = C([0,T], G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d))$ be the continuous path space over $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Its topology is given by the uniform convergence in t as usual. The random variable Ψ takes values in this Polish space and hence its law is a probability measure on this space.

Introduce a small parameter $0 < \varepsilon \leq 1$. Let $\varepsilon\Psi$ is the dilatation of Ψ by ε, which is equal to the natural lift of $\varepsilon\psi$, anyway. Denote by ν_ε the law of $\varepsilon\Psi$ on $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Our main result is the following:

Main result: *For any $\alpha \in (1/3, 1/2)$, the family $(\nu_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ of probability measures on $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ satisfies a large deviation principle as $\varepsilon \searrow 0$ with a good rate function I.*

Here, we give a few quick remarks. The rate function I takes the usual form. So, we omit its explicit form. Just like in the usual rough path theory, the continuity of the Itô map and the contraction principle for LDP immediately imply Freidlin-Wentzell type LDP for solutions of rough SPDEs as in [3].

We show the main result by developping an extended version of Friz-Victoir's method for Schilder-type LDP for Gaussian rough path (2007).

References

[1] Hairer, M.; Rough stochastic PDEs. Comm. Pure Appl. Math. 64 (2011), no. 11, 1547–1585.

[2] Hairer, M.; Solving the KPZ equation. To appear in Ann. of Math. arXiv:1109.6811

[3] Hairer, M.; Weber, H.; Rough Burgers-like equations with multiplicative noise. To appear in Probab. Theory Related Fields. arXiv:1012.1236

[4] Hairer, M.; Maas, J.; Weber, H.; Approximating rough stochastic PDEs. Preprint. arXiv:1202.3094

[5] Inahama, Y.; Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path. preprint, arXiv:1212.1249

Lyons' extension theorem via fractional calculus

伊藤悠 (Yu Ito)

京都大学 情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

本講演では，Lyons の拡張定理 (または第 1 基本定理) と呼ばれるラフパス解析の基本定理について，fractional calculus に基づく別証明を取り扱う．

まず，Lyons の拡張定理を紹介するためにいくつか準備をする．単体 $\Delta_T := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le t \le T\}$ から $T^{(k)}(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{j=0}^{k}(\mathbb{R}^d)^{\otimes j}$ への $X^0_{s,t} = 1$ なる連続写像全体の集合を $C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ と記す．$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ が，任意の $j = 0, 1, \ldots, k$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{j} X^i_{s,u} \otimes X^{j-i}_{u,t} = X^j_{s,t} \quad \forall s, u, t \in [0,T], \quad s \le u \le t$$

を満たすとき，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k)$ を k 次の乗法的汎関数と呼ぶ．$\beta \in (0,1]$ とする．$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ が，任意の $j = 1, \ldots, k$ に対して，

$$\sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|X^j_{s,t}|}{(t-s)^{j\beta}} < \infty$$

を満たすとき，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k)$ は有限な β-Hölder 評価を持つという．例えば，区間 $[0,T]$ から $\mathbb{R}^d$ への Lipschitz 連続関数 x に対して，反復積分

$$X^j_{s,t} = \int_{s<u_1<\cdots<u_j<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_j}$$

で定まる $X = (1, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ は，k 次の乗法的汎関数であり有限な 1-Hölder 評価を持つことが知られている．本講演では，これを x の step-k signature と呼ぶことにする．以下が Lyons の拡張定理である（正確な主張は [3, Theorem 2.2.1] を参照)．

Lyons の拡張定理． $X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を有限な β-Hölder 評価を持つ $\lfloor 1/\beta \rfloor$ 次の乗法的汎関数とする．このとき，任意の $k \ge \lfloor 1/\beta \rfloor + 1$ に対して，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ は有限な β-Hölder 評価を持つ k 次の乗法的汎関数 $(X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}, \ldots, X^k)$ に一意的に拡張される．

この有限な β-Hölder 評価を持つ $\lfloor 1/\beta \rfloor$ 次の乗法的汎関数 $X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を (β-Hölder) ラフパスと定義する．つまり，Lyons の拡張定理とは，ラフパスに対して，有限な β-Hölder 評価を持つ乗法的汎関数としての拡張の一意性を与える結果であり，ラフパスという概

念の妥当性を保証するものであるといえる．実際，第 $(\lfloor 1/\beta \rfloor+1)$ レベルパス $X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+1}$ は $\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ で構成され，それ以上のレベルのパス $X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+2}, \dots, X^k$ も同様の方法で帰納的に構成されることが示される．そして，$X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+1}, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+2}, \dots, X^k$ は $\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ から一意的に定まることが導かれる．その一方で，$\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ をそれらより小さいレベルのパスから一意的に定めることは一般にはできない．そこで，$X = (X^0, X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を考察の対象とし，これをラフパスと呼ぶのである．また，Lyons [3] による $(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスの構成方法は，rough integral と呼ばれるラフパス解析における線積分の概念を定義する際にも本質的に用いられており，このことからもラフパス解析の基礎理論における Lyons の拡張定理の重要性が分かる．このような理論の基礎を担う結果の別証明に触れることは基本的であり，ラフパス解析の基礎理論を Lyons [3] とは異なる方法で記述する試みという観点からも興味深い．

本講演では，$(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスを fractional calculus に基づき構成することを考える．まず，Lyons [3] による構成方法を概観した後，講演者の得た fractional calculus に基づく構成方法を紹介する．ここで鍵となるのが，次の２つの積分である．１つ目は，講演者 [2] により導入された rough integral の第 1 レベルパスの fractional derivative に基づく表現，２つ目は，Gubinelli [1] により導入された weakly controlled path に対する積分である．Gubinelli [1] の理論はラフパス解析の変種で，weakly controlled path に対する積分が Gubinelli [1] の理論における線積分の概念である．また，Gubinelli [1] の線積分は，Lyons [3] の線積分 (もう少し正確には rough integral の第 1 レベルパス) より被積分関数の定義が一般的であることが知られている．そこで，講演者は，[2] で導入した rough integral の第 1 レベルパスの fractional derivative に基づく表現を weakly controlled path に対する積分に一般化し，Lyons の拡張定理に応用することを考えた．つまり，Gubinelli [1] の理論における線積分に対しても fractional derivative に基づく表現を与え，この線積分の被積分関数がより一般的であるという利点を生かし，$(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスを構成することを試みた．この試みの結果として Geometric (β-Hölder) ラフパスと呼ばれる，step-$\lfloor 1/\beta \rfloor$ signature のラフパス空間の位相における極限として特徴づけられる典型的なラフパスに対しては，fractional calculus に基づく $(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスの構成方法が得られることとなった．

参考文献

[1] M. Gubinelli, Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.* **216** (2004), 86–140.

[2] Y. Ito, Integrals along rough paths via fractional calculus, Preprint (2013).

[3] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals, *Rev. Math. Iberoamericana* **14** (1998), 215–310.

Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion

永沼 伸顕 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1 はじめに

本講演では，非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解を Crank-Nicholson 近似により近似した場合の近似誤差に関する結果を報告する．この結果は [1] で与えられた予想を肯定的に解決するものである．

まずは非整数 Brown 運動の定義を与える．

定義 1. 実数値確率過程 $B = \{B_t\}_{0\leq t\leq 1}$ が Hurst 定数 $0 < H < 1$ をもつ非整数 Brown 運動であるとは，B は連続な Gauss 過程であって，平均が 0，分散が

$$\boldsymbol{E}[B_sB_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$$

となるものをいう．

この定義から，$\boldsymbol{E}[|B_t - B_s|^2] = |t-s|^{2H}$，および，パスの H 未満の Hölder 連続性が分かる．さらに，$H \neq 1/2$ のときには，非整数 Brown 運動がセミマルチンゲールにならないことも分かる．これらの事実から，非整数 Brown 運動による確率積分は伊藤積分としては定義できず，通常の確率解析の議論を適用することができない．このような確率微分方程式を駆動過程の Gauss 性を用いて解析することが，本問題の骨子となる．

2 設定および結果

本講演では，

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)\, d^\circ B_t, \quad t \in (0,1], \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

なる確率微分方程式を考える．ここで，σ は実数値関数，$x_0 \in \mathbf{R}$，$d^\circ B$ は Russo-Vallois の意味での対称積分を表わす．つぎに，Crank-Nicholson 近似 $\{X^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ を

$$\begin{cases} X_0^{(m)} = x_0, \\ X_t^{(m)} = X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)} + \dfrac{1}{2}\left(\sigma\left(X_t^{(m)}\right) + \sigma\left(X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}\right)\right)\left(B_t - B_{\eta^{(m)}(t)}\right), \quad t \in (0,1], \end{cases} \tag{2}$$

で定義する．ただし，$\eta^{(m)}(t) = \sup\{l2^{-m} : 0 \leq l2^{-m} < t\}$ である．こうして定められた $X^{(m)}$ は連続な確率過程であることに注意する．

このときに，以下の定理が得られる．

仮定 2. (A1) $\sigma \in C_{\mathrm{bdd}}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$,　(A2) $\inf|\sigma| > 0$.

定理 3. 仮定 2 の下で，$1/3 < H < 1/2$ ならば

$$\lim_{m\to\infty}\left(B, 2^{m(3H-1/2)}(X^{(m)} - X)\right) = \left(B, c_{3,H}\sigma(X_\cdot)\int_0^\cdot \frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\, dW_s\right)$$

が一様位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{3,H}$ は H に依存する定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動，dW は通常の伊藤積分を表わす．

3 証明

定理 3 の証明の概略を述べる．

まず，[2] に従い，方程式 (1) の解，Crank-Nicholson 近似 (2) の表現を述べる．方程式 (1) の解 X は，$X_t = \phi(x_0, B_t)$ と表される．ただし，ϕ は，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = \sigma(\phi(x,y)), \quad y \in \mathbf{R}, \\ \quad \phi(x,0) = x, \end{cases}$$

の解である．そして，仮定 2 の (A2) の下で，Crank-Nicholson 近似 $X^{(m)}$ は，$X_t^{(m)} = \phi(x_0, B_t + U_t^{(m)})$ と表される．ここで，$U^{(m)}$ は

$$U_t^{(m)} = \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t \rfloor - 1} \left\{ f_3(X_{j2^{-m}}^{(m)})(\triangle B_{j2^{-m}})^3 + f_4(X_{j2^{-m}}^{(m)}))(\triangle B_{j2^{-m}})^4 + R(X_{j2^{-m}}^{(m)}), \triangle B_{j2^{-m}}) \right\}$$

で定義される確率過程である．ただし，$\lfloor \xi \rfloor$ は $\xi > 0$ の整数部分，$f_3 = (\sigma^2)''/24$，$f_4 = \sigma(\sigma^2)'''/48$，$\triangle B_{j2^{-m}} = B_{(j+1)2^{-m}} - B_{j2^{-m}}$，$R$ は $|R(\xi,h)| \le M|h|^5$ を満たす関数である．[1] は，これらの表現を用いて，定理 3 の限定的な場合を示している．

つぎに，$U^{(m)}$ の漸近挙動を見る．そのために，weighted Hermite variation とよばれる Wiener 汎関数の解析を行う．この weighted Hermite variation は

$$G_q^{(m)}(t) = 2^{-m/2} \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t \rfloor - 1} \frac{f(B_{(j+1)2^{-m}}) + f(B_{j2^{-m}})}{2} H_q(2^{mH} \triangle B_{j2^{-m}})$$

として定義される．ただし，f は実数値関数，H_q は q 次の Hermite 多項式である．この Wiener 汎関数に対して，Nualart-Peccati による fourth moment theorem を用いることで次が得られる．

定理 4. 自然数 q は 2 以上，関数 f は滑らかで導関数は多項式増大を持つとする．このとき，$1/2q < H < 1 - 1/2q$ であれば，

$$\lim_{m \to \infty} \left(B, G_q^{(m)} \right) = \left(B, c_{q,H} \int_0^{\cdot} f(B_s)\, dW_s \right)$$

が Skorohod 位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{q,H}$ は q と H によって決まる正定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動である．

最後に，$U^{(m)}$ を $G_3^{(m)}$ を用いて表現し，定理 4 を用いて定理 3 を導く．定理 3 で現れる正定数 $c_{3,H}$ および Brown 運動 W は定理 4 で与えられるものである．

参考文献

[1] Neuenkirch, A., Nourdin, I.: Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. J. Theoret. Probab. **20**(4), 871–899 (2007)

[2] Nourdin, I.: A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. In: Séminaire de probabilités XLI, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1934, pp. 181–197. Springer, Berlin (2008)

ON THE MONOTONICITY OF $\mathcal{L}_0$-COST ALONG BACKWARD HEAT FLOW

TAKAFUMI AMABA AND KAZUMASA KUWADA

Let M be a d-dimensional connected manifold. Assume we are given a complete Ricci flow

$$\frac{dg(t)}{dt} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

on M, that is, we are given a family $(g(t))_{0\le t\le T}$ of Riemannian metrics on M, satisfying the above equation, each of which makes M a complete Riemannian manifold. When M is closed, this (modified by a diffeomorphism) can be interpreted as a gradient flow of the Perelman's $\mathcal{F}$-functional (see [3]) defined by

$$\mathcal{F}(g,f) := \int_M \big\{R_g + |\nabla^{g(t)} f|_g^2\big\} e^{-f}\mathrm{dvol}_g$$

under the constraint that $e^{-f}\mathrm{dvol}_g$ is fixed. Here g and f are any Riemannian metrics and smooth functions on M respectively. The quantity R_g denotes the scalar curvature with respect to the Riemannian structure g.

On the other hand, from an optimal-transport point of view, Lott [2] defined the $\mathcal{L}_0$ functional by

$$\mathcal{L}_0(\gamma) := \frac{1}{2}\int_{t'}^{t''} \big\{|\dot\gamma(t)|_{g(t)}^2 + R_{g(t)}(\gamma(t))\big\}\mathrm{d}t$$

where $0 \le t' < t'' \le T$ and $\gamma : [t', t''] \to M$ is a smooth curve in M. From this lagrangian, a Riemannian distance-like function $L_0^{t',t''}$ and the $\mathcal{L}_0$-transportation cost can be defined by

$$L_0^{t',t''}(m', m'') := \inf_{\gamma} \mathcal{L}_0(\gamma), \quad m' \ne m'' \text{ in } M$$

where the infimum is taken among smooth curves $\gamma : [t', t''] \to M$ such that $\gamma(t') = m'$ and $\gamma(t'') = m''$, and

$$C_0^{t',t''}(\mu', \mu'') := \inf_{\pi\in\prod(\mu',\mu'')} \int_{M\times M} L_0^{t',t''}(m', m'')\pi(\mathrm{d}m', \mathrm{d}m'')$$

respectively, where μ' and μ'' are two Borel probability measures on M and $\prod(\mu', \mu'')$ is the set of all couplings of them.

The Perelman's $\mathcal{F}$-functional and the $\mathcal{L}_0$-transportational cost are related (see Lott [2]) by the equation

$$\lim_{t''\to t'} \frac{1}{t''-t'} C_0^{t',t''}(\alpha(t'), \alpha(t'')) = \mathcal{F}\big(g(t'), \frac{\mathrm{d}\alpha(t')}{\mathrm{dvol}_{g(t')}}\big)$$

where α is a curve in the space of probability measures on M satisfying the backward heat equation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \triangle \alpha.$$

By using this relation, Lott [2] gave an optimal-transport theoretical proof to the monotonicity of the $\mathcal{F}$-functional along the Ricci flow (although this is immediate from the Perelman's gradient flow interpretation of Ricci flow). In fact, heuristically, he proved the monotonicity of the $\mathcal{L}_0$-transportational cost along the backward heat flow, which is valid at least under the condition where Otto's calculus works well.

In this paper, we investigated a probabilistic proof of the Lott's result for a deeper understanding. Let

$$0 \le t_0' < t_1' \le T, \quad 0 \le t_0'' < t_1'' \le T$$

with $t_0' < t_0''$ and $t_1' - t_0' = t_1'' - t_0''$. It will be helpful to think that we have two worlds governed by Ricci flows $(M, g(t'))_{t_0' \le t \le t_1'}$ and $(M, g(t'))_{t_0'' \le t \le t_1''}$.

Theorem 1. *Assume that our Ricci flow satisfies the condition*

$$\sup_{(t,m)\in[t_0',t_1'']\times M} |\mathrm{Rm}_{g(t)}(m)|_{g(t)} < \infty$$

where Rm_g *is the Riemannian curvature tensor with respect to the Riemannian structure* g*. Then for each* $(m', m'') \in M \times M$*, there exists a coupling of* $g(t_1' - s)$*-Brownian motion* $X = (X_s)_{0 \le s \le t_1' - t_0'}$ *starting from* m' *and* $g(t_1'' - s)$*-Brownian motion* $Y = (Y_s)_{0 \le s \le t_1'' - t_0''}$ *starting from* m'' *such that* $s \mapsto L_0^{t_1'-s, t_1''-s}(X_s, Y_s)$ *is a supermartingale.*

Remark 1. (1) This result is an analogy of Kuwada-Philipowski [1] in which they discussed an existence of such a coupling of Brownian motions fitting to the relationship of Perelman's $\mathcal{W}$-functional and the transportation cost described by the Perelman's $\mathcal{L}$-geometry. (2) From Theorem 1, the monotonicity of $\mathcal{L}_0$-cost along the backward heat equation follows. (3) This also gives an extension of Lott's monotonicity result because Lott's framework assumed the closedness of M but we do not. Instead we assumed the space-time boundedness of the Riemannian curvature.

References

[1] Kuwada, Kazumasa; Philipowski, Robert *Coupling of Brownian motions and Perelman's L-functional.* J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 9, 2742-2766.

[2] Lott, John *Optimal transport and Perelman's reduced volume.* (English summary) Calc. Var. Partial Differential Equations 36 (2009), no. 1, 49-84.

[3] Perelman, Grisha, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application.*, arXiv:math/0211159 [math.DG]

(T. Amaba) Ritsumeikan University
E-mail address: capca0310@gmail.com

(K. Kuwada)Ochanomizu University

Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs*

Xueping Huang† 塩沢 裕一‡

重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の upper rate function を, グラフに適合した距離と体積増大度で特徴づける. ここで upper rate function とは, マルコフ連鎖の法則に従って運動する粒子が, “典型的” にはどの程度遠方へ移動できるのかを表す関数のことである.

まず初めに, Keller-Lenz (2012) に従い, 重み付きグラフの定義を述べる. V を可算無限集合とし, μ を V 上の正値関数とする. このとき, 関数 μ を V 上のラドン測度と見なすことができる. w を $V \times V$ 上の非負値対称関数とし, 任意の点 $x \in V$ について

$$w(x,x) = 0, \qquad \sum_{y \in V} w(x,y) < \infty$$

を満たすものとする. 以上で定まる 3 つ組 (V, w, μ) を**重み付きグラフ**と呼ぶ. 2 点 $x, y \in V$ に対して $w(x,y) > 0$ が成立するとき, x と y は**隣接している**といい, $x \sim y$ とかく. 特に, V の各点が隣接点を有限個しか持たないとき, 重み付きグラフ (V, w, μ) は**局所有限**であるという. 点列 $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ は, $x_0 = x$, $x_n = y$, $x_{k-1} \sim x_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ を満たすとき, x と y を結ぶ**道**であるという. 特に任意の相異なる 2 点 $x, y \in V$ を結ぶ道が存在するとき, 重み付きグラフ (V, w, μ) は**連結**であるという.

以下では (V, w, μ) を局所有限で連結な重み付きグラフとする. V 上の関数で, 有限個の点以外では値 0 をとるもの全体の集合を $C_0(V)$ とする. このとき, $L^2(V; \mu)$ 上の二次形式

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} w(x,y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)), \quad u, v \in C_0(V)$$

は可閉であり, 二次形式 $(\mathcal{E}, C_0(V))$ の閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(V; \mu)$ 上の正則ディリクレ形式となる. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成するマルコフ連鎖を, 重み付きグラフ (V, w, μ) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶことにする. このマルコフ連鎖は, 次で定義される行列 $(q_{xy})_{x, y \in V}$ を Q-matrix にもつ V 上の最小なマルコフ連鎖となる:

$$q_{xy} = \begin{cases} \dfrac{w(x,y)}{\mu(x)} & x \neq y \\[2ex] -\dfrac{\sum_{z \in V, z \neq x} w(x,z)}{\mu(x)} & x = y. \end{cases}$$

*本講演は同題目の論文 (Stochastic Process. Appl. に掲載予定) に基づく.

†Faculty of Mathematics and Information, FSU Jena

‡岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部環境数理学科

定義 1. (V, w, μ) を重み付きグラフとする. σ を $V \times V$ から有界閉区間 $[0,1]$ への関数とし, 任意の $x, y \in V$ について

$$\sigma(x,y) = \sigma(y,x), \quad \sigma(x,y) > 0 \iff x \sim y$$

を満たすものとする.
(1) 任意の点 $x \in V$ に対して不等式

$$\sum_{y \in V} \sigma(x,y)^2 w(x,y) \leq \mu(x)$$

が成立するとき, 関数 σ は重み付きグラフ (V, w, μ) に**適合している**という.
(2) σ を重み付きグラフ (V, w, μ) に適合した関数とする. $V \times V$ 上の関数

$$d_\sigma(x,y) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_{k-1}, x_k) \mid (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ道} \right\}, \quad x, y \in V$$

を, 重み付きグラフ (V, w, μ) に**適合した道の距離**という.

注意 1. 重み付きグラフ (V, w, μ) に適合した道の距離は V 上の距離になる. この距離は強局所型ディリクレ形式の内在的距離の類似であり, Frank-Lenz-Wingert (2010) の意味での, 正則ディリクレ形式に対する内在的距離にもなる.

定義 2. 重み付きグラフ (V, w, μ) に対応するマルコフ連鎖を $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in V})$ とかき, このマルコフ連鎖は保存的であると仮定する. d を V 上の距離とし, 点 $x \in V$ を 1 つ固定する. $[0, \infty)$ 上の狭義単調増加な正値関数 $R(t)$ は, 等式

$$P_x(d(x, X_t) \leq R(t) \text{ for all sufficiently large } t) = 1$$

が成立するとき, マルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d に関する **upper rate function** であるという.

V 上の距離 d に関する, 中心 $x_0 \in V$, 半径 $r > 0$ の開球を $B_d(x_0, r)$ とおく.

定理 1. (V, w, μ) を重み付きグラフとし, d_σ をこのグラフに適合した距離とする. 条件

(i) $\inf_{x \in V} \mu(x) > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_{\cdot}^{\infty} \frac{r}{\log \mu(B_{d_\sigma}(x_0, r))} \, \mathrm{d}r = \infty$

の下で次が成立する.
(1) 重み付きグラフ (V, w, μ) に対応するマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ は保存的である.
(2) ある定数 $c > 0$ と $\hat{R} \geq 1$ が存在して, 関数

$$\psi(R) := c \int_{\hat{R}}^{R} \frac{r}{\log \mu(B_{d_\sigma}(x_0, r)) + \log \log r} \, \mathrm{d}r$$

の逆関数 $\psi^{-1}(t)$ はマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d_σ に関する upper rate function となる.

定理 1 (2) は, リーマン多様体上のブラウン運動の escape rate に関する Hsu-Qin (2010) の結果をマルコフ連鎖へ拡張するとともに, Huang (2013) の結果を改良している. 特に定理 1 (2) は精密であることも分かる. 一方で, 定理 1 (1) は新しい結果ではない. 実際, Folz (2013) は条件 (i) を課さずにマルコフ連鎖の保存性を示している.

ピン止め拡散過程と滑らかさの悪い係数を持つ放物型方程式の基本解のヘルダー連続性

楠岡誠一郎
（東北大学大学院理学研究科）

$a(t,x) = (a_{ij}(t,x))$ を $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$-値有界可測関数で一様楕円性を満たすものとする。すなわち、Λ をある正の数、I を単位行列として

$$\Lambda^{-1} I \le a(t,x) \le \Lambda I \tag{1}$$

を満たすものとする。b を $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{R}^d$-値有界可測関数、c を $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 上の有界可測関数とする。これらの関数に対して、次の 2 階線型放物型偏微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t,x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(t,x) + c(t,x) u(t,x) \\ u(0,x) &= f(x) \end{cases} \tag{2}$$

この方程式 (2) の基本解を $p(s,x;t,y)$ と書くことにする。すなわち、$p(s,x;t,y)$ は

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,x;t,y) u(s,y) dy, \quad s < t, \ x \in \mathbb{R}^d$$

を満たす関数である。仮定 (1) の下では基本解の存在性が知られている。

この型の方程式の基本解の滑らかさに関する研究は 1950 年代からなされている。a が (1) を満たすときの放物型方程式 $\partial_t u = \nabla \cdot a \nabla u$ 基本解のヘルダー連続性については De Giorgi(1957) と Nash(1958) の各氏によって独立に示された。これらの結果では、ある $\alpha \in (0,1]$ が存在し、基本解が α-ヘルダー連続となることが示されていて、この指数 α はハルナック不等式などに現れる数々の定数に依存している。これらの結果は、より一般の放物型方程式 $\partial_t u = \nabla \cdot a \nabla u + b \cdot \nabla u - cu$ の場合に拡張され、同様の結論が得られている (Aronson (1967) または Stroock (1988) を参照のこと)。非局所型生成作用素（対応する確率過程は stable-like process）の場合に対する類似の結果も Chen and Kumagai (2003) によって得られている。

上の手法で基本解のヘルダー連続の指数を得るまでの計算は非常に複雑で具体的な値を計算するのは難しく、指数の下からの評価を得ることも難しい。本講演では、このヘルダー連続の指数の下からの評価を確率論的手法を用いて考える。

$B(x,R)$ を $\mathbb{R}^d$ における中心 x, 半径 R の開球とする。次を仮定する。

$$\sum_{i,j=1}^d \sup_{t \in [0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(s,x) \right|^\theta e^{-m|x|} dx \le M \tag{3}$$

ここで、微分は弱微分の意味であり、θ は $[d,\infty) \cap (2,\infty)$ の元であるような定数、m と M は非負の定数である。このとき、ソボレフの埋め込み定理により a の空間変数に関する連続性が得られる。すなわち、任意の $R > 0$ に対して $[0,\infty)$ 上の非減少連続関数 ρ_R で $\rho_R(0) = 0$ と

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \sup_{i,j} |a_{ij}(t,x) - a_{ij}(t,y)| \le \rho_R(|x-y|), \quad x, y \in B(0;R).$$

を満たすようなものが存在する。ここで、仮定 (3) からは a の空間に関する局所ヘルダー連続性が得られないことに注意する。本研究で得られた結果は次の定理である。

定理 1. 任意の $R > 0$ と十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対し、d, ε, m, M, θ, R, ρ_R, Λ, $\|b\|_\infty$, $\|c\|_\infty$ に依存する定数 C が存在して

$$|p(0,x;t,y) - p(0,z;t,y)| \le C t^{-d/2-1+\varepsilon/2} e^{Ct} |x-z|^{1-\varepsilon}$$

が $t \in (0,\infty)$, $x, z \in B(0;R/2)$, $y \in \mathbb{R}^d$ に対して成り立つ。

定理 1 は基本解 $p(0,x;t,y)$ が x に関して局所 $(1-\varepsilon)$-ヘルダー連続であることを表している。証明の鍵になる手法は Lindvall と Rogers (1986) により導入された確率微分方程式のカップリングである。カップリングの手法を用いることにより、$p(0,x;t,y)$ の x に関するヘルダー連続性を、係数の滑らかさを用いずに、拡散過程の振動を用いて導くことができるということがこの証明のアイデアである。

注意 2. a が単位行列の場合でも b が不連続であるとき、基本解が連続微分可能でない例が知られている。

それでは、証明について少し述べることにする。a が滑らかな場合に、そのときの $(1-\varepsilon)$-ヘルダー連続性に現れる定数が適切な依存性を持っていることを示す。一般の a に対しては滑らかなもので近似すればよい。滑らかな a に対して $\sigma(t,x) := a(t,x)^{1/2}$(行列の平方根) とする。これに対して、次の確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX_t^x &= \sigma(t,X_t^x)dB_t \\ X_0^x &= x. \end{cases} \tag{4}$$

(4) に現れるブラウン運動 B_t が成すフィルトレーションを $\mathscr{F}_t$ と書くことにする。今、a が滑らかだと仮定してあるので (4) には pathwise uniqueness が成り立っていることに注意する。

この X^x を用いて $p(0,x;t,y)$ を表すことを考える。Feynman-Kac の公式と Girsanov 変換を用いることによって、(2) の解 u は

$$u(t,x) = E\left[f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t \langle b_\sigma(s,X_s^x), dB_s\rangle \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2}\int_0^t |b_\sigma(s,X_s^x)|^2 ds + \int_0^t c(s,X_s^x)ds\right)\right]$$

と表せる。ただし、$b_\sigma(t,x) := \sigma(t,x)^{-1}b(t,x)$ である。X^x に対応する基本解を $p^X(s,x;t,y)$ と書くことにし、

$$\mathcal{E}(s,t;X^x) := \exp\left(\int_s^t \langle b_\sigma(u,X_u^x), dB_u\rangle - \frac{1}{2}\int_s^t |b_\sigma(u,X_u^x)|^2 du + \int_s^t c(u,X_u^x)du\right)$$

とし、$P^{X_t^x=y}$ を $X_t^x = y$ という条件の下での確率、$E^{X_t^x=y}$ を $P^{X_t^x=y}$ に関する期待値とすると、

$$p(0,x;t,y) = p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(0,t;X^x)\right] \tag{5}$$

と表すことができる。よって、$p(0,x;t,y)$ の x に関するヘルダー連続性を調べるためには、関数 $x \to p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(0,t;X^x)\right]$ のヘルダー連続性を調べればよいことになる。

$X_t^x = y$ となる確率は 0 であるので、(5) で現れる条件付き期待値の計算は少々複雑であるが、X の基本解 $p^X(s,x;t,y)$ を用いればある程度具体的に計算することができる。実際、$s,t \in (0,\infty)$ で $s < t$ を満たすものとし、$A \in \mathscr{F}_s$ としたとき、

$$P^{X_t^x=y}(A) = \frac{1}{p^X(0,x;t,y)}\int_{\mathbb{R}^d} p^X(s,\xi;t,y)P\left(A \cap \{X_s^x \in d\xi\}\right) \tag{6}$$

が成り立つ。この式 (6) を用いることにより、(5) で現れる条件付き期待値を扱うことができるのである。ただ、当然のことであるが (6) の右辺の被積分関数は $s \uparrow t$ のときに発散する。この発散の度合いを制御するために (3) を仮定していて、この仮定の下では次が成り立つ。

補題 3. τ_1, τ_2 を停止時刻とする。このとき、任意の $q > 2$ と十分小さい $\varepsilon > 0$ と $t \in (0,\infty)$, $s \in [0,t)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して、

$$p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(s\wedge\tau_1, s\wedge\tau_2; X^x)^q\right] \le Ct^{-d/2-\varepsilon}e^{Cq^2t}$$

が成り立つ。ただし、C は d, ε, m, M, θ, Λ, $\|b\|_\infty$, $\|c\|_\infty$ に依存する定数。

これにより、特に条件付き確率の下で $\mathcal{E}(s,t;X^x)$ は十分良い可積分性を持つことが分かる。あとはカップリングの手法によって得られる x に関する連続性の度合いを調べれば良く、これについて講演で詳しく述べる。

周遊路を結合してできる過程の汎関数極限定理

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)

伊藤 [1] の周遊理論によると，原点正則再帰的なマルコフ過程 X を，局所時間 L を用いて原点を起終点とする周遊路に分解するとき，周遊路に値を取るポアソン点過程 p が得られる．その特性測度 $\boldsymbol{n}$ を**周遊測度**と呼ぶ．逆に，周遊測度 $\boldsymbol{n}$ が与えられれば，それを特性測度として持つ周遊路値のポアソン点過程 p をとり，元の過程 X と局所時間 L とを再構成できる．

本講演の目的は，周遊測度列の適切な収束概念を導入し，その収束を仮定して (X, L) の同時分布の極限定理を導くこと，さらにその応用例を与えることである．講演の内容は論文 [3] に基づく．なお，極限定理は昨年の講演と同じで，応用例は新しい結果である．

1. 汎関数極限定理の一般論

E を Polish 空間とし，一点 $o \in E$ をとり原点と呼ぶ．$E \setminus \{o\}$ 上の σ-有限測度 ν に対し，ν を特性測度とするポアソン点過程を $(p(l))_{l \in D(p)}$ とする．$l \in [0,\infty) \setminus D(p)$ では $p(l) = o$ として拡張して得られる点過程を $p = (p(l))_{l \geq 0}$ と書き，**原点外ポアソン点過程**と呼ぶ．

E 値 càdlàg path の全体を $D = D_E$ とし，原点に一度到達すると停止する道の全体を D^o と書く．座標過程を $X = (X(t))_{t \geq 0}$ と書き，$T_x = \inf\{t > 0 : X(t) = x\}$ と書く．ずっと原点に留まる path のことも同じ記号 o で表す．E の距離 d について，原点との距離を $|x| = d(x, o)$ と表し，$\|w\| = \sup |w(t)|$ と表す．一般に，D 上の σ-有限測度 $\boldsymbol{n}$ が 4 条件

(N0) $\boldsymbol{n}(D \setminus (D^o \cap \{0 < T_o < \infty\}) = 0$;

(N1) $\int_D (T_o \wedge 1) \mathrm{d}\boldsymbol{n} < \infty$;

(N2) $\boldsymbol{n}(D) = \infty$;

(N3) $\boldsymbol{n}(\|X\| \geq r) < \infty$ for all $r > 0$

を満たすとき，**周遊測度**と呼ぶことにする (拡張された定義)．このとき，ν を特性測度とする原点外ポアソン点過程 p から狭義増加 Lévy 過程 $\eta(p; l) = \sum_{s \leq l} T_o(p(s))$ が定まる (簡単のため，原点での停留はないものとする)．これより局所時間過程 $L(p; t)$ および周遊路を繋いだ càdlàg 過程 $X(p; t)$ が得られる．なお，上の条件だけだと，一般に $X(p; t)$ はマルコフ過程とは限らない．ここで，法則収束が確率空間の取り換えで概収束にできるという Skorokhod の定理をまねて，周遊測度列の収束概念を与える．

定義 1. 列 $\boldsymbol{n}_n$ が $\boldsymbol{n}_\infty$ に**周遊測度の意味で収束する**とは，ある Polish 空間 $\widetilde{E}$ とその上の σ-有限測度 $\widetilde{\nu}$，および可測写像列 $\Phi_n : \widetilde{E} \to D$ であって以下を満たすことを言う:

(G1) $\boldsymbol{n}_n = (\widetilde{\nu} \circ \Phi_n^{-1})|_{D \setminus \{o\}}$ for $n = 1, 2, \ldots$ and ∞;

(G2) $\Phi_n \to \Phi_\infty$ in D, $\widetilde{\nu}$-a.e.;

(G3) $T_o(\Phi_n) \to T_o(\Phi_\infty)$ in $[0,\infty]$, $\widetilde{\nu}$-a.e.;

(G4) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_{\widetilde{E}} \left\{1 \wedge \sup_{n \geq N} T_o(\Phi_n)\right\} \mathrm{d}\widetilde{\nu} < \infty$.

定理 2. 周遊測度列 $\boldsymbol{n}_n$ が周遊測度 $\boldsymbol{n}_\infty$ に収束すると仮定し，さらに $\boldsymbol{n}_\infty(X(T_o-) \neq o) = 0$ と仮定する．このとき，ν_n を特性測度とする原点外ポアソン点過程を p_n と書くと，

$$(X(p_n), L(p_n), \eta(p_n)) \xrightarrow{\text{law}} (X(p_\infty), L(p_\infty), \eta(p_\infty)) \quad \text{on } D \times D_{\mathbb{R}} \times D_{\mathbb{R}}. \tag{1}$$

2．自己相似過程の跳入拡張の均質化

[2] においては，拡散過程の跳入拡張に対し，スケール極限における均質化の定理を与えた．それは，speed measure の均質化で Bessel 過程が現れる要素と，跳入測度の均質化でべき測度が現れる要素との混成であった．ここでは後者だけに着目し，はじめから自己相似性を持つ連続流入過程を考え，その跳入拡張に対する均質化の極限定理を与える．

$E = [0,\infty)$ とし，$o = 0$ とする．$\{X, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ は原点正則再帰的マルコフ過程で，$\boldsymbol{n}(X(0) \neq 0) = 0$ および $\boldsymbol{n}(X(T_0-) \neq 0) = 0$ を仮定する．さらに，任意の点 x で $\boldsymbol{n}(T_x < T_0) > 0$ を仮定する．定数 $1 < b < c$ と $0 < \psi < 1$ が存在して以下を満たすとする:

(S1) $\{\Psi X, \mathbb{P}_x\} \overset{\text{law}}{=} \{X, \mathbb{P}_{\psi x}\}$ for all x. 但し，$(\Psi w)(t) = \psi w(ct)$;

(S2) $\{b^{-1}L(c\cdot), \mathbb{P}_0\} \overset{\text{law}}{=} \{L, \mathbb{P}_0\}$.

ξ を非負 $\mathcal{F}_{0+}$-可測汎関数で $\xi \circ \Psi^{-1} = \xi$ なるものとし，j を $(0,\infty)$ 上の測度として，

$$\boldsymbol{n}_{\xi,j}(\mathrm{d}w) = \xi(w)\boldsymbol{n}(\mathrm{d}w) + \int_{(0,\infty)} j(\mathrm{d}x)\mathbb{P}_x^o(\mathrm{d}w) \tag{2}$$

と定める．但し，$\mathbb{P}_x^o$ は原点停止過程の分布とする．$\boldsymbol{n}_{\xi,j}$ が周遊測度であるとき，対応する過程を $\{X_{\xi,j}, L_{\xi,j}, \eta_{\xi,j}\}$ と書く．

定理 3 (small jumping-in). 以下を仮定する:

(S3-a) $\boldsymbol{n}(D \setminus [D_{1,x} \cup D_{2,x}]) = 0$ for all $x > 0$.

但し，$D_{1,x} = \{T_{\psi^n x} \to 0\}$, $D_{2,x} = \{\liminf T_{\psi^n x} \geq T_o\}$.

(C-a) $\xi^*(w) = \xi(w) + \displaystyle\int_{E\setminus\{o\}} \frac{j(\mathrm{d}x)}{\sigma(x)} 1_{D_{1,x}}(w)$ とおくとき，$\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ も周遊測度．

このとき，$\boldsymbol{n}_{\xi,j}^{(n)} := b^n \boldsymbol{n}_{\xi,j} \circ (\Psi^n)^{-1}$ は周遊測度の意味で $\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ に収束する．さらに，

$$\left\{\Psi^n X_{\xi,j}, b^{-n}L_{\xi,j}(c^n\cdot), c^{-n}\eta_{\xi,j}(b^n\cdot)\right\} \xrightarrow{\text{law}} \left\{X_{\xi^*,0}, L_{\xi^*,0}, \eta_{\xi^*,0}\right\} \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3}$$

仮定が煩雑になるが，跳びのみの過程に収束する場合の定理も与える．

例として，正値自己相似過程であって Lamperti 変換で対応する Lévy 過程がスペクトル負のものを扱う．また，少し修正した定理の例として，Walsh のブラウン運動も扱う．

なお，Sierpiński gasket/carpet 上のブラウン運動でも，$\boldsymbol{n}(D \setminus D_{1,x}) = 0$ が言えれば類似の結論が得られるのだが，今のところわからない．

参考文献

[1] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the 6th Berkeley Sympo., Vol. III: Probability theory*, 225–239, 1972.

[2] K. Yano. Convergence of excursion point processes and its applications to functional limit theorems of Markov processes on a half-line. *Bernoulli*, 14(4):963–987, 2008.

[3] K. Yano. Functional limit theorems for processes pieced together from excursions. In preparation.

Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces

Shigeki Aida
Tohoku University

This talk is based on a joint work with Kosuke Sasaki (SPA, 123, 2013, 3800-3827). Let D be a connected domain in $\mathbb{R}^d$. We define the set $\mathcal{N}_x$ of inward unit normal vectors at the boundary point $x \in \partial D$ by

$$\mathcal{N}_x = \cup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r} \tag{1}$$

$$\mathcal{N}_{x,r} = \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{n}| = 1, B(x - r\boldsymbol{n}, r) \cap D = \emptyset \right\}, \tag{2}$$

where $B(z,r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - z| < r\}$, $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$.

Let us recall what Skorohod problem is.

Definition 1 (Skorohod Problem on $\bar{D}$). *Let $w(t)$ $(0 \le t \le T)$ be a continuous path on $\mathbb{R}^d$ with $w(0) \in \bar{D}$. The pair of paths (ξ, ϕ) on $\mathbb{R}^d$ is a solution of a Skorohod problem on $\bar{D}$ associated with w if the following properties hold.*

(i) *$\xi(t)$ $(0 \le t \le T)$ is a continuous path in $\bar{D}$ with $\xi(0) = w(0)$.*

(ii) *It holds that $\xi(t) = w(t) + \phi(t)$ for all $0 \le t \le T$.*

(iii) *$\phi(t)$ $(0 \le t \le T)$ is a continuous bounded variation path on $\mathbb{R}^d$ such that $\phi(0) = 0$ and*

$$\phi(t) = \int_0^t \boldsymbol{n}(s) d\|\phi\|_{[0,s]} \tag{3}$$

$$\|\phi\|_{[0,t]} = \int_0^t 1_{\partial D}(\xi(s)) d\|\phi\|_{[0,s]}. \tag{4}$$

where $\boldsymbol{n}(t) \in \mathcal{N}_{\xi(t)}$ if $\xi(t) \in \partial D$.

In the above, $\|\phi\|_{[0,t]}$ stands for the total variation of ϕ on $[0,t]$. When the solution ξ is unique, we denote $\xi = \Gamma(w)$ and we call the mapping Γ a Skorohod map.

In this talk, we consider domains whose boundary may not be smooth. More precisely, we consider the following conditions (A), (B), (C) on domains following Saisho (PTRF 74, 1987) and Lions-Sznitman (Comm.Pure Appl.Math. 37, 1984).

Definition 2. (A) (*uniform exterior sphere condition*). *There exists a constant $r_0 > 0$ such that*

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset \quad \text{for any } x \in \partial D. \tag{5}$$

(B) *There exist constants $\delta > 0$ and $\beta \geq 1$ satisfying:*
for any $x \in \partial D$ there exists a unit vector l_x such that

$$(l_x, \boldsymbol{n}) \geq \frac{1}{\beta} \qquad \textit{for any } \boldsymbol{n} \in \cup_{y \in B(x,\delta)\cap\partial D} \mathcal{N}_y. \tag{6}$$

(C) *There exists a C_b^2 function f on $\mathbb{R}^d$ and a positive constant γ such that for any $x \in \partial D$, $y \in \bar{D}$, $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_x$ it holds that*

$$(y - x, \boldsymbol{n}) + \frac{1}{\gamma}\left((Df)(x), \boldsymbol{n}\right)|y - x|^2 \geq 0. \tag{7}$$

Note that the condition (C) holds locally when (A) and (B) hold. Under the assumptions (A) and (B), Saisho proved the existence and uniqueness of the solution of the Skorohod problem which improved the result in Lions-Sznitman* and Tanaka (Hiroshima Math.J.9,1979). Moreover, the Skorohod mapping $\Gamma : w \mapsto \xi$ is 1/2-Hölder continuous map in the uniform norm.

Let us explain the meaning of reflecting SDE. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a complete probability space and $\mathcal{F}_t$ be the right-continuous filtration with the property that $\mathcal{F}_t$ contains all null sets of $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Let $B(t)$ be an $\mathcal{F}_t$-Brownian motion on $\mathbb{R}^n$. Let $\sigma \in C(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d)$, $b \in C(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ be continuous mappings. We consider an SDE with reflecting boundary condition on $\bar{D}$:

$$X(t) = x + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s) + \int_0^t b(X(s))ds + \Phi(t), \tag{8}$$

where $x \in \bar{D}$. We denote this SDE by SDE(σ, b) simply. A pair of $\mathcal{F}_t$-adapted continuous processes $(X(t), \Phi(t))$ is called a solution to (8) if the following holds. Let

$$Y(t) = x + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s) + \int_0^t b(X(s))ds \tag{9}$$

Then $(X(\cdot, \omega), \Phi(\cdot, \omega))$ is a solution of the Skorohod problem associated with $Y(\cdot, \omega)$ for almost all $\omega \in \Omega$. Saisho proved that the existence and uniqueness of the solution to (8) under the conditions (A) and (B) and the Lipschitz continuities on σ and b.

Now, we assume $\sigma \in C_b^2$ and $b \in C_b^1$. Let $N \in \mathbb{N}$. We define the Wong-Zakai approximation X^N to the solution X of the SDE$(\sigma, \tilde{b})$, where $\tilde{b}(x) = b(x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D\sigma)[\sigma(x)\cdot](\cdot)$ as the solution to the reflecting ODE:

$$X^N(t) = x + \int_0^t \sigma(X^N(s))dB^N(s) + \int_0^t b(X^N(s))ds + \Phi^N(t), \tag{10}$$

where $B^N(t)$ is the piecewise linear approximation of $B(t)$ at times $\{kT/N \mid 0 \leq k \leq N\}$. The following our main theorem improves the weak convergence which were proved in Evans-Stroock (SPA 121, 2011). When ∂D is bounded and smooth, the convergece in probability was proved by Doss and Priouret (Z. Wahrsc. Verw. Gebiete 61, 1982).

Theorem 3 (A-Sasaki)**.** *Assume $\sigma \in C_b^2$, $b \in C_b^1$ and conditions* (A), (B) *and* (C)*. Let X be the solution to* SDE$(\sigma, \tilde{b})$*, where $\tilde{b} = b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D\sigma)(\sigma)$. Let $0 < \theta < 1$. There exists a positive constant $C_{T,\theta}$ such that for all $N \in \mathbb{N}$,*

$$E\left[\max_{0\leq t\leq T} |X^N(t) - X(t)|^2\right] \leq C_{T,\theta}\left(\frac{T}{N}\right)^{\theta/6}. \tag{11}$$

*They assume additional assumptions " admissibility condition on D".

Distributions of hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions

(濱名裕治氏，白井朋之氏との共同研究に基づく) [1]

松本裕行 (青山学院大学)

§1. 分布関数と尾確率

$\{R_t^{(\nu)}\}$ を指数 ν(または $2\nu+2$ 次元) の Bessel 過程とし，生成作用素を $\mathscr{G}^{(\nu)}$ と書く：

$$\mathscr{G}^{(\nu)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{2x}, \qquad x > 0.$$

境界 0 は，$\nu \geqq 0$ のとき流入，$-1 < \nu < 0$ のとき正則，$\nu \leqq -1$ のとき流出である．

$R_0^{(\nu)} = a$ のとき $b \geqq 0$ への到達時刻を $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ と書く．

$\lambda > 0$ のとき，$[b,\infty) \ni x \mapsto u(x) = E[\exp(-\lambda\tau_{x,b}^{(\nu)})]$ は，固有値問題 $\mathscr{G}^{(\nu)}u = \lambda u$ の x について単調減少で $u(b) = 1$ をみたす解であり，$0 < b < a$ であれば

$$E[\exp(-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)})] = \frac{a^{-\nu}K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu}K_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$$

が成り立つ．$0 < a < b$ の場合は，Macdonald 関数とも呼ばれる第 2 種変形 Bessel 関数 K_ν を第 1 種変形 Bessel 関数 I_ν におき変えればラプラス変換の表示が得られる．a, b の一方が 0 のときも同様であるが，ここでは省略する．

まず，このラプラス変換の逆変換を実行して到達時刻 $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の分布関数の具体形を与え，尾確率の漸近挙動が得られることを示す．$0 < a < b$ のときは，自然境界 ∞ を考える必要がなく，結果はよく知られているので省略する．Kent(ZW, 1980) を参照されたい．

定理 1． $0 < b < a$ とする．$|\nu| > 3/2$ であり ν が整数でないなら，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) =& \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+|\nu|} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} ds \\ & - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \sum_{j=1}^{N(\nu)} \frac{K_\nu(az_{\nu,j}/b)}{z_{\nu,j}K_{\nu+1}(z_{\nu,j})} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s} + \frac{(a-b)z_{\nu,j}\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} ds \\ & - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} L_{\nu,a/b}(x)}{x} dx\right] ds. \end{aligned}$$

ここで，$z_{\nu,j}$ $(j = 1, 2, ..., N(\nu))$ は $K_\nu(z)$ の零点であり，関数 $L_{\nu,c}$ は次で与えられる：

$$L_{\nu,c}(x) = \frac{\cos(\pi\nu)\{I_\nu(cx)K_\nu(x) - I_\nu(x)K_\nu(cx)\}}{K_\nu(x)^2 + \pi^2 I_\nu(x)^2 + 2\pi\sin(\pi\nu)K_\nu(x)I_\nu(x)}.$$

---

[1] 濱名-松本 (Trans AMS(2013)，J.Math-for-Industry(2012), 投稿中)，濱名-松本-白井 (preprint).

$|\nu| < 3/2$ のときは K_ν は零点をもたず右辺の第 2 項は現れない，ν が整数のときは右辺の第 3 項は現れないなどの違いはあるが，すべての場合について分布関数の具体形を K_ν の零点および変形 Bessel 関数に関する積分によって与えることができる．

系． $0 < b < a$ のとき, $\nu > 0$ は整数ではない[2]とすると，$t \to \infty$ のとき次が成り立つ：

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu} - \left(\frac{b^3}{2a}\right)^{\nu}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu}\right\}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-\nu} + o(t^{-\nu}).$$

その他の場合も同様に尾確率の漸近挙動を示すことができる．

到達時刻の確率密度に関しても，分布関数に関する表現，漸近挙動の両辺を形式的に微分すれば結果が得られ，実際に証明することができる．

§2. Lévy 測度

$\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の確率分布は無限分解可能である．次の等式から $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の Lévy 測度の具体形を与えることができる．$G_\nu(x) = K_\nu(x)^2 + \pi^2 I_\nu(x)^2 + 2\pi \sin(\pi\nu) K_\nu(x) I_\nu(x)$ とおくと，次が成り立つ：

$$\frac{K_{\nu+1}(z)}{K_\nu(z)} = 1 + \frac{2\nu}{z} + \sum_{j=1}^{N(\nu)} \frac{1}{z_{\nu,j} - z} + \cos(\pi\nu)\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+z)G_\nu(x)}. \tag{*}$$

定理２． $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の Lévy 測度 $m_{a,b}^{(\nu)}$ は次で与えられる Lebesgue 測度に関する密度をもつ：

$$\begin{aligned}\frac{m_{a,b}^{(\nu)}(ds)}{ds} =& \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi s^3}}\sum_{j=1}^{N(\nu)}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4s}}\left(e^{\frac{z_{\nu,j}\xi}{\sqrt{2a}}} - e^{\frac{z_{\nu,j}\xi}{\sqrt{2b}}}\right)d\xi \\ &+ \frac{\cos(\pi\nu)}{2\sqrt{\pi s^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\eta G_\nu(\eta)} e^{-\frac{\xi^2}{4s}}\left(e^{-\frac{\xi\eta}{\sqrt{2a}}} - e^{-\frac{\xi\eta}{\sqrt{2b}}}\right)d\xi d\eta, \qquad s > 0.\end{aligned}$$

§3. Wiener sausage への応用

等式 (*) の応用を 2 つ述べる．第 1 は，Wiener sausage の体積の期待値である．$\{B_t\}$ を $B(0) = 0$ である d 次元 Brown 運動とし，半径 $r > 0$ の球に付随する Wiener sausage を $W(t)$ と書く：$W(t) = \{y \in \mathbf{R}^d\,;\ |y - B(s)| < r$ をみたす $s \in [0,t]$ が存在する $\}$.

U_r を原点中心，半径 r の球とすると，$W(t)$ の体積 $|W(t)|$ の期待値は

$$E[|W(t)|] = |U_r| + L^{(d)}(t), \qquad \text{ただし，}\quad L^{(d)}(t) = \int_{\mathbf{R}^d\setminus U_r} P_x(\tau \leqq t)dx$$

によって与えられることが知られている．ここで，P_x は x を出発点とする Wiener 測度，$\tau = \inf\{t \geqq 0; B(t) \in U_r\}$ ($\overset{\text{(law)}}{=} \tau_{|x|,r}^{((d/2)-2)}$) であり，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(\tau \leqq t)dt = \frac{|\partial U_r|}{\sqrt{2\lambda^3}} \frac{K_{d/2}(r\sqrt{2\lambda})}{K_{d/2-1}(r\sqrt{2\lambda})}$$

[2] ν が整数でも異なる表現をもつ定数に対して結果が得られるが，定数の一致が証明できていない．

が成り立つ．d が奇数であれば $K_{d/2}$ は初等関数であり，$d=1,3$ の場合の結果はよく知られている．d が大きい場合は濱名氏 (JMSJ, 2010) が具体形，漸近挙動を示した．

上の等式 (*) を用いることにより，d が偶数の場合に次を得た．

定理３． (1) $d=2$ のとき，

$$L^{(2)}(t)=2\pi r\left[\sqrt{\frac{2t}{\pi}}+\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{xy-1+e^{-xy}}{y^3G_0(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].$$

(2) $d=4$ のとき，

$$L^{(4)}(t)=2\pi^2r^2\left[t+\frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{y^3G_1(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].$$

(3) d が 6 以上の偶数のとき，

$$\begin{aligned}L^{(d)}(t)=&S_{d-1}r^{d-2}\left[\frac{(d-2)t}{2}+\frac{r^2}{d-4}-\frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^{N_d}\frac{1}{(z_j^{(d)})^2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}+z_j^{(d)}x}dx\right.\\&\left.+\frac{(-1)^{d/2-1}\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-xy}}{y^3G_{(d-2)/2}(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].\end{aligned}$$

$t\to\infty$ のときの漸近挙動が興味深いので，講演中に述べる．

§4. K_ν の零点のみたす代数方程式

ここまでは，確率論的な諸量に対する K_ν の零点を用いた表示を与えた．最後に，等式 (*) から零点に対する代数方程式が得られることを示す．

$K_\nu(z)$ の $z\to\infty$ のときのよく知られた漸近展開を用いると，(*) の左辺の漸近展開ができる．右辺は簡単な形をしているので，その漸近展開は容易である．これらを合わせると，帰納的に定まる実数列 $\{a_n\}$ が存在して，($a_0=1,\ a_1=\nu+\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4}),$ $a_3=-\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4}),\ a_4=-\frac{1}{8}(\nu^2-\frac{1}{4})(\nu^2-\frac{25}{4}),\ a_5=\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4})(\nu^2-\frac{13}{4}),...$)

$$\sum_{j=1}^{N(\nu)}(z_{\nu,j})^n=-a_{n+1}+(-1)^n\cos(\pi\nu)\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{G_\nu(x)}dx\quad(n=1,2,...)$$

が成り立つことが分かる．

右辺の積分に対する数値計算は各種の方法により可能で，この代数方程式の数値解も得られる．結果の一部を講演中に与える．

(*) の両辺の $z\to0$ としたときの漸近展開も可能であり，これから零点の逆数 $(z_{\nu,j})^{-1}$ に対する代数方程式を得る．零点に対して同じ数値解が得られ，結果の確認ができる．

2 次 Wiener 汎関数について

谷口説男 (九州大学基幹教育院)

本講演では，いくつかの 2 次 Wiener 汎関数の例を振り返ったのち，新たな具体例について報告する．

$(\mathcal{W}, \mathcal{H}, \mu)$ を抽象 Wiener 空間，すなわち，実可分 Banach 空間 $\mathcal{W}$，$\mathcal{W}$ に連続かつ稠密に埋め込める実可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$，および $\mathcal{W}$ 上の次のような特性関数を持つ Gauss 測度 μ の三つ組とする．

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathrm{i}\ell(w)}\mu(dw) = e^{-\frac{1}{2}\|\ell\|_{\mathcal{H}}^2} \quad (\forall \ell \in \mathcal{W}^* \subset \mathcal{H}^* = \mathcal{H}).$$

ただし，$\mathcal{W}^*$ は $\mathcal{W}$ の双対空間であり，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のノルムである．$\mathcal{H}^{\otimes n}$ を $\mathcal{H}^n$ 上の Hilber-Schmidt 型 $\mathbb{R}$-値 n 重線形線形写像からなる実可分 Hilbert 空間とする．Wiener 汎関数 F の Malliavin 解析の意味での n 階微分 $\nabla^n F$ は "$\mathcal{H}^{\otimes n}$-値" Wiener 汎関数である．

$q \in L^2(\mu)$ が **2 次 Wiener 汎関数**であるとは，3 階微分 $\nabla^3 q = 0$ となることをいう．$h \in \mathcal{H}$ と対称な Hilbert-Schmidt 作用素 $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を，それぞれ $\mathcal{H}$-値，$\mathcal{H}^{\otimes 2}$-値の定数値 Wiener 汎関数と考え，微分 ∇ の共役作用素 ∇^* を作用させて得られる

$$Q_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\nabla^*)^2 A, \quad \nabla^* h$$

は共に 2 次 Wiener 汎関数である．逆に，Malliavin 解析の意味での微分 $\nabla F = 0$ となる $\mathcal{H}^{\otimes n}$-値 Wiener 汎関数は定数関数となることに注意すれば，2 次 Wiener 汎関数 q は次のような表現を持つことが証明できる．

$$q = \frac{1}{2} Q_A + \nabla^* h + c, \quad \text{ただし}, A = \nabla^2 q,\ h = \mathbf{E}[\nabla q],\ c = \mathbf{E}[q]$$

とし，$\mathbf{E}$ は μ に関する期待値である．この表示のもと，十分小さい実部を持つ $\zeta \in \mathbb{C}$ に対する q の Fourier-Laplace 型変換は次のようになる．

$$\mathbf{E}[e^{\zeta q}] = \frac{1}{\sqrt{\det_2(I - \zeta A)}} e^{\zeta c} e^{\langle (I - \zeta A)^{-1} h, h \rangle_{\mathcal{H}}}. \tag{1}$$

$\mathcal{W}$ を特定し直接的に A の固有関数展開を求めることで 2 次 Wiener 汎関数の Fourier-Laplace 型変換の具体的な表示を求めることができる．たとえば，次のような 2 次 Wiener 汎関数である．

(i) $[0, T]$ 上の 1 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^1$ における $\mathfrak{h}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^T \theta_t^2 dt$．ただし，$\theta_t(w) = w(t)$ $(w \in \mathcal{W}_T^1)$ とする．

(ii) $\mathcal{W}_T^1$ における $\mathfrak{v}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^T (\theta_t - \overline{\theta})^2 dt$．ただし，$\overline{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \theta_t dt$ とおく．

(iii) $[0, T]$ 上の 2 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^2$ における $\mathfrak{s}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^T \langle J\theta_t, d\theta_t \rangle_{\mathbb{R}^2}$．ただし，$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(iv) $\mathcal{W}_T^1$ における $\displaystyle\int_0^T \left(\int_t^T \theta_s ds\right)^2 dt$．これは，$\frac{1}{4}\|\nabla\mathfrak{h}_T\|_{\mathcal{H}}^2$ と一致しており，$\mathfrak{h}_T$ に関する停留位相法を考える際に自然に出現する．

(v) $[0,T]$ 上の n 次元 Wiener 空間 $\mathcal{W}_T^n$ における $\displaystyle\int_0^T \langle \boldsymbol{c}, \xi_{\boldsymbol{p}}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \langle B\xi_{\boldsymbol{p}}(T), \xi_{\boldsymbol{p}}(T)\rangle_{\mathbb{R}^n}$．ただし，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{p} = (p^1, \ldots, p^n) \in \mathbb{R}^n$，$\xi_{\boldsymbol{p}}^i(t) = e^{-p^i t}\displaystyle\int_0^t e^{p^i s} d\theta_s^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．

　これは，KdV 方程式のソリトン解 (無反射ポテンシャル) を構成する際に現れる．

(vi) $[0,T]^2$ 上の $W(t,0) = W(0,s) = 0$ となる 2 変数連続関数 $W(t,s)$ の全体 $\mathbf{W}$ 上の $\displaystyle\int_{[0,T]^2} W(t,s)^2 dtds$．これは $\mathfrak{h}_T$ の自然な拡張である．

(vii) $[0,1]$ 上の 1 次元ピンド Wiener 空間における $\displaystyle\int_0^1 \frac{\theta_t^2}{t(1-t)}dt$．これは Anderson-Darling 統計量と関連して出現する．

(viii) $\mathcal{W}_T^2$ における $\displaystyle\int_0^T \langle J\xi_{\boldsymbol{p}}(t), d\xi_{\boldsymbol{p}}(t)\rangle_{\mathbb{R}^2}$．ただし，$\boldsymbol{p} = (p,p)$ とする．

　本講演では，上記 (iv)〜(viii) について簡単に紹介したのち，(viii) を一般化して得られる，以下に述べる $\mathcal{W}_T^2$ の 2 次 Wiener 汎関数について報告する．

　C^1-級関数 $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ に対し，$\mathbb{R}^2$-値確率過程 $\{\Theta^\phi(t) = (\Theta^{\phi,1}(t), \Theta^{\phi,2}(t))\}_{t\leqq T}$ を

$$\Theta^{\phi,\alpha}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi(t)}\displaystyle\int_0^t \phi(s)d\theta^\alpha(s) & (t>0), \\ 0 & (t=0), \end{cases} \qquad \alpha = 1,2$$

と定義する．これを用いて $\{\mathfrak{s}^\phi(t)\}_{t\leqq T}$ を

$$\mathfrak{s}^\phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \langle J\Theta^\phi(s), d\Theta^\phi(s)\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

と定義する．

$$\dot{\widehat{Ah}}(t) = J\left\{\Theta_t^\phi[h] - \phi(t)\left(\int_t^T \frac{\phi'(s)}{\phi(s)^2}\Theta_s^\phi[h]ds\right)\right\} \quad (t \leqq T,\, h \in \mathcal{H})$$

で与えられる対称な Hilbert-Schmidt 作用素 $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を用いて

$$\mathfrak{s}^\phi(T) = \frac{1}{2}Q_A$$

と表現できること，さらにこの A についての考察から得られる $\mathbf{E}[e^{\zeta\mathfrak{s}^\phi(T)}]$ の具体形について紹介する．さらに，Cameron-Martin に由来する Strum-Liouville 方程式を用いる手法を利用して得られる別の表示についても紹介する．

1次元拡散作用素の固有関数のいくつかの具体例について

重川 一郎　京都大学

1 Introduction

Hermite 多項式が Ornstein-Uhlenbeck 作用素の固有関数であることはよく知られている．ここで Hermite 多項式は次で定義されるものである．

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1}$$

この多項式は次の性質をみたす．

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x).$$

即ち Hermite 多項式を微分したものは再び Hermite 多項式で，固有関数になっている．このことから固有関数を微分すると，再び固有関数が得られることが予想できる．実際あるクラスの 1 次元拡散作用素に対して，このことを一般的に示すことが出来る．

2 1次元拡散作用素

区間 $I = (l, r)$ 上の拡散作用素を考える．I 上に C^2 級関数 $a > 0$, $p > 0$ が与えられているとする．I 上に測度 $\nu = pdx$ を与える．以後 $L^2(\nu)$ の代わりに $L^2(p)$ という形で，密度関数で測度を表すことにする．そして Hilbert 空間 $H = L^2(p)$ 上で，次のような作用素を考える．

$$\mathfrak{A}u = \frac{1}{p}(apu')'. \tag{2}$$

対応する Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}(u, v) = \int_0^\infty u'v'ap\,dx. \tag{3}$$

である．境界条件は必要な場合は Neumann 条件を課す．$b = a' + a(\log p)'$ と定めると

$$\mathfrak{A}u = au'' + bu', \tag{4}$$

である．さらに

$$\hat{\mathfrak{A}}\theta = a\theta'' + (a' + b)\theta' + b'\theta \tag{5}$$

と定める．$\hat{\mathfrak{A}}$ は $L^2(ap)$ での作用素とみなす．このとき，次が成立する．

定理 2.1. b' が上に有界であるとする．すると $\mathfrak{A}u = au'' + bu'$ と , $\hat{\mathfrak{A}}\theta = a\theta'' + (a' + b)\theta' + b'\theta$ は 0 を除いて同じスペクトルを持つ．但し $\mathfrak{A}$ には Neumann 条件を課し，$\hat{\mathfrak{A}}$ は台がコンパクトな関数に制限した bilinear form の閉包として定まるものを取る．さらに固有関数の対応は $u \mapsto u'$ で与えられる．

3 Examples

以下で定理 2.1 の具体例を与える．

3.1 平方 Bessel 過程

$I=[0,\infty)$ とし生成作用素として

$$x\frac{d^2}{dx^2}+(1+\alpha)\frac{d}{dx} \tag{6}$$

を考える．定理 2.1 の設定の下では $a=x$, $p=x^\alpha$ ととったことになる．作用素は

$$\mathfrak{A}u=xu''+(1+\alpha)u',\quad \hat{\mathfrak{A}}u=xu''+(2+\alpha)u'$$

で与えられる．$\mathfrak{A}$ と $\hat{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる．固有関数の表示には超幾何関数

$${}_0F_1(c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_n n!}x^n \tag{7}$$

を使う．以下 $B(c;x)={}_0F_1(c;x)$ と記す．また $B(c\pm)=B(c\pm 1;x)$ と略記する．

命題 3.1. 次の関係式が成り立つ．

$$B'=\frac{1}{c}B(c+),\quad xB'=(c-1)(B(c-)-B)$$

(a) $\alpha>-1$ のとき
固有値 $-\xi$ $(\xi\geq 0)$ の固有関数は $B(1+\alpha;-\xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[B(1+\alpha;-\xi x)]=\frac{\lambda}{1+\alpha}B(2+\alpha;-\xi x).$$

(b) $\alpha<0$ のとき固有値 $-\xi$ $(\xi\geq 0)$ の固有関数は $x^{-\alpha}B(1-\alpha;\xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\xi x)]=-\alpha x^{-\alpha-1}B(-\alpha;-\xi x)$$

注意 3.1. 関数 B は本質的に Bessel 関数である．

$$B(\alpha+1,-\xi x)=\Gamma(\alpha+1)(\xi x)^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x}) \tag{8}$$

注意 3.2. 固有関数の意味は次のスペクトル分解による．Hankel 変換を

$$\hat{H}_\alpha[f](\xi)=\int_0^\infty f(x)\Gamma(\alpha+1)^{-1}B(\alpha+1;-\xi x)x^\alpha\,dx. \tag{9}$$

と定義すると

$$f(x)=\int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)\Gamma(\alpha+1)^{-1}B(\alpha+1;-\xi x)\xi^\alpha\,d\xi \tag{10}$$

および次の Perseval の等式が成立する．

$$\int_0^\infty f(x)^2x^\alpha\,dx=\int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)^2\xi^\alpha\,d\xi. \tag{11}$$

3.2 有限区間の平方 Bessel 過程

$I=[0,a]$ で $x\frac{d^2}{dx^2}+(1+\alpha)\frac{d}{dx}$ を考える．a での境界条件は，Neumann と Dirichlet で考える．$z(\alpha,n)$ で Bessel 関数 J_α の n 番目の零点とする．

(a) $\alpha>-1$ のとき

[entrance, Neumann] 系列の固有値 $-\frac{z(\alpha+1,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $B(1+\alpha;-\frac{z(\alpha+1,n)^2}{4a}x)$

[entrance, Dirichlet] 系列の固有値 $-\frac{z(\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $B(1+\alpha;-\frac{z(\alpha,n)^2}{4a}x)$

(b) $\alpha<0$ のとき

[exit, Neumann] 系列の固有値 $-\frac{z(-\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\frac{z(-\alpha,n)^2}{4a}x))$

[exit, Dirichlet] 系列の固有値 $-\frac{z(1-\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\frac{z(1-\alpha,n)^2}{4a}x)$

3.3 Laguerre 多項式

$I=[0,\infty)$ とし Laguerre 多項式に対応する次の作用素を

$$\mathfrak{A}u=xu''+(1+\alpha-x)u',$$

で定める．定理 2.1 の設定の下で，$a=x$, $p=x^\alpha e^{-x}$ とした場合で

$$\mathfrak{A}u=xu''+(1+\alpha-x)u',\quad \hat{\mathfrak{A}}u=xu''+(2+\alpha-x)u'-u.$$

$\mathfrak{A}$ と $\hat{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる．固有関数の表示には超幾何関数

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}x^n. \tag{12}$$

を使う．以下 $M(a,c;x)={}_0F_1(a;c;x)$ と記す．

(a) $\alpha>-1$ のとき

entrance 系列の固有値 $-n$ に対する固有関数 は $M(-n,\alpha+1;x)$ $(n=0,1,\dots)$ で

$$[M(-n,\alpha+1;x)]'=-\frac{n}{\alpha+1}M(-n+1,\alpha+2;x)$$

が成り立つ．

(b) $\alpha<0$ のとき

entrance 系列の固有値 $-n+\alpha$ に対する固有関数 は $x^{-\alpha}M(-n,1-\alpha;x)$ $(n=0,1,\dots)$ で

$$[x^{-\alpha}M(-n,1-\alpha;x)]'=-\alpha x^{-\alpha-1}M(-n,-\alpha;x)$$

が成り立つ．

注意 3.3. 関数 M は本質的に Laguerre 多項式である．

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x) \tag{13}$$

その他 Jacobi 多項式に関しても同様のことが成り立つ．

Games of singular control and stopping driven by spectrally one-sided Lévy processes

Kazutoshi Yamazaki
Department of Mathematics
Kansai University
E-mail: kyamazak@kansai-u.ac.jp

Joint with Daniel Hernández-Hernández (CIMAT)

We study a zero-sum game where the evolution of a spectrally one-sided Lévy process is modified by a singular controller and is terminated by the stopper. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space hosting a spectrally one-sided Lévy process $X = \{X_t; t \geq 0\}$. Let $\mathbb{P}_x$ be the conditional probability under which $X_0 = x$ (also let $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_0$), and let $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ be the filtration generated by X.

The games analyzed in this paper consist of two players. The controller chooses a process $\xi \in \Xi$, which denotes the set of *nondecreasing* and *right-continuous* $\mathbb{F}$-adapted processes with $\xi_{0-} := 0$, while the stopper chooses the time $\tau \in \Upsilon$ among the set of $\mathbb{F}$-stopping times Υ. The controller minimizes and the stopper maximizes the common performance criterion:

$$J(x; \xi, \tau) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} h(U_t^\xi) \mathrm{d}t + \int_{[0,\tau]} e^{-qt} \mathrm{d}\xi_t + e^{-q\tau} g(U_\tau^\xi) 1_{\{\tau < \infty\}} \right],$$

where U^ξ is a right-continuous controlled process defined by

$$U_t^\xi := X_t + \xi_t, \quad t \geq 0.$$

The problem is to show the existence of a *saddle point*, or equivalently a *Nash equilibrium* $(\xi^*, \tau^*) \in \Xi \times \Upsilon$, such that

$$J(x; \xi^*, \tau) \leq J(x; \xi^*, \tau^*) \leq J(x; \xi, \tau^*), \tag{0. 1}$$

for any $\xi \in \Xi$ and any stopping time $\tau \in \Upsilon$; in this case we call $J(x; \xi^*, \tau^*)$ the value function of the game.

In this paper, we consider for X a general spectrally negative or positive Lévy process and show under a suitable condition that a saddle point is given by $(\xi^a, \tau_{a,b})$ for some $a < b$, where we define

$$\xi^a_t := \sup_{0 \le t' \le t} (a - X_{t'}) \vee 0, \quad t \ge 0,$$
$$\tau_{a,b} := \inf\{t \ge 0 : U^{\xi^a}_t > b\}.$$

The saddle point and the corresponding value function is written in terms of the scale function. Numerical examples under phase-type Lévy processes are also given.

References

[1] Hernández-Hernández, D. and Yamazaki, K., *Games of singular control and stopping driven by spectrally one-sided Lévy processes*, arXiv:1308.3141, 2013.

ある積分方程式の解の確率表現

A Probabilistic Representation of Solutions to A Class of Integral Equations

道工勇 (Isamu Dôku) 埼玉大学 (Saitama Univ.） e-mail: idoku@mail.saitama-u.ac.jp

$D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ とし, $\alpha \cdot \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3)$ で内積を表し, $e_x = x/|x|$, $(x \in D_0)$ と定める. 未知関数 $u \equiv u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$ に関する下記の積分方程式を考える.

$$e^{\lambda t|x|^2} u(t,x) = u_0(x) + \frac{\lambda}{2}\int_0^t ds\ e^{\lambda s|x|^2} \int p(s,x,y;u) n(x,y) dy + \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{\lambda s|x|^2} f(s,x) ds, \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D_0 \tag{1}$$

ここで, $\lambda > 0$, $u_0 : D_0 \to \mathbb{C}^3$, $u(t,x)|_{t=0} = u_0(x)$, $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$, $f(t,x)/|x|^2 = \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $p(t,x,y;u) = u(x,y) \cdot e_x\ \{u(t,x-y) - e_x(u(t,x-y) \cdot e_x)\}$ である. 一方, マルコフ核 $K : D_0 \to D_0 \times D_0$ を元 $z \in D_0$ に対して, $K_z(dx,dy) \in \mathcal{P}(D_0 \times D_0)$ であって, 正値可測関数 $h = h(x,y)$ に対して, $D_0 \times D_0$ 上の可測関数 $k > 0$ がとれて $\iint h(x,y) K_z(dx,dy) = \int h(x,z-x) k(x,z) dx$, $k(x,y) = i|x|^{-2} n(x,y)$ と定め, $\mathbb{R}^+$ 上の任意の可測関数 $f, g > 0$ に対して

$$\int h(|z|)\nu(dz) \int g(|x|) K_z(dx,dy) = \int g(|z|)\nu(dz) \int h(|y|) K_z(dx,dy) \tag{2}$$

が成り立つとする. ただし, $\nu(dz) = |z|^{-3} dz$ である.

$\mathbb{C}^3$ 内において, 要素 z の直交部分への射影を $\mathrm{Proj}^z(\cdot)$ と表し, β, γ の $z \in D_0$ に対する ★ 積を $\beta \bigstar_{[z]} \gamma = -i\ (\beta \cdot e_z)\ \mathrm{Proj}^z(\gamma)$ と定める. いま分枝率がパラメータ $\lambda|x|^2$ で与えられ, 分枝機構が等確率の 2 元的なもので, 子分枝粒子の挙動（分布）が K_x で定まる, 空間 D_0 上の連続時間 2 元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ を考える. このとき, この $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造に着目して, マーク付き樹木 $\omega = (t, (t_m), (x_m), (\eta_m), m \in \mathcal{V})$ の空間を Ω とする. また $P_{t,x}$ を Ω 上の確率測度で時間逆進行の $Z^{K_x}(t)$ の法則とする. ここで t は共通の祖先が誕生した時刻とし, $\eta_m = 0$ で粒子 x_m は死滅し, $\eta_m = 1$ で 2 つの子孫 x_{m1}, x_{m2} を生成するものとする. ただし, $\mathcal{V} = \cup_{\ell \geq 0}\{1,2\}^\ell$ は樹形構造を記述するための長さ ℓ の有限記号系列であるラベル全体の集合である. $\Omega \ni \omega$ に対して, $\mathcal{N}(\omega)$ で樹形分岐点となる節点のラベル全体, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{N}(\omega) \ni m$ の直属の節点が $\mathcal{N}(\omega)$ に入るものの中で正時間部分 $t_m(\omega) > 0$ を $N_+(\omega)$, 非負時間部分 $t_m(\omega) \leqslant 0$ を $N_-(\omega)$ と表し, $N(\omega) = N_+(\omega) \cup N_-(\omega)$ とする. つぎに $\Theta^m(\omega)$ は $m \in N_+(\omega)$ なら $\tilde{f}(t_m(\omega), x_m(\omega))$, $m \in N_-(\omega)$

なら $u_0(x_m(\omega))$ を表すとする．このとき，$\Xi^{m_1}_{m_2.m_3}(\omega) \equiv \Xi^{m_1}_{m_2,m_3}[u_0,f](\omega) := \Theta^{m_2}(\omega)$ $\bigstar_{[x_{m_1}]}\ \Theta^{m_3}(\omega)$ と定める．ただし，積の順序は自然順序 $\prec$ に関して lexicographically に $m \prec m'$ のとき m のものが左に，m' のものが右にくるように書き表すものとする．また $m \in \mathcal{V}$ が樹形の単独端点のラベルのとき，$\Xi^{\emptyset}_{m,\emptyset}(\omega) = \Theta^m(\omega)$ とする．$\mathcal{N}(\omega)$ における各節点で，上述のような設定の下で $\bigstar$ 積を帰納的に実行して得られる量（樹状 $\bigstar$ 積汎関数）を

$$M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega) = \prod \bigstar_{[x_{\tilde{m}}]}\Xi^{m_1}_{m_2.m_3}[u_0,f](\omega) \tag{3}$$

と表す．ここで $m_1 \in \mathcal{N}(\omega)$, $m_2, m_3 \in N(\omega)$ であり，(3) 式の $\bigstar$ 積 $\prod_{\bigstar}$ は $|m_1| = \ell$ のとき $\tilde{m} \in \mathcal{N}(\omega) \cap \{|\tilde{m}| = \ell - 1\}$ なる $x_{\tilde{m}}$ に関して $\bigstar$ 積を lexicographical な順にとることを意味する．

一方，2 元的樹木の節点 (x_m) に依って索引付けられた，重み (U,F) 付き樹状 $*$ 積汎関数 $M^{\langle U,F\rangle}_{*}(\omega)$ を構成する．ここで U (F) はそれぞれ D_0 $(\mathbb{R}_+ \times D_0)$ 上の非負可測関数で，各 x ごとに $F(\cdot,x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ である．また汎関数構成時の積は通常の乗数積 $*$ をとったものである．

定理. $|u_0(x)| \leqslant U(x)$, $|\tilde{f}(t,x)| \leqslant F(t,x)$, $(\forall t,x)$, かつ $\forall t > 0$ に対して，$E_{t,x}[M^{\langle U,F\rangle}_{*}] < \infty$, a.e.-$x$ を仮定する．このとき，2 元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造から決まる節点のラベル集合により索引付けられた，ある適当な重み (u_0,f) 付き樹状 $\bigstar$ 積汎関数 $M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega)$ が存在して，$u(t,x) = E_{t,x}[M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}]$ は積分方程式 (1) の一意解である．ただし $E_{t,x}$ は確率測度 $P_{t,x}$ による期待値を表す．

References.

[1] Aldous, D. The continuum random tree I. & III. AP 19 (1991), 1–28; ibid. 21 (1993), 248–289.

[2] Aldous, D. Tree-based models for random distribution of mass. J. Stat. Phys. 73 (1993), 625–641.

[3] Aldous, D. and Pitman, J. Tree-valued Markov chains derived from Galton-Watson processes. Ann. Inst. Henri Poicaré 34 (1998), 637–686.

[4] Aldous, D. and Pitman, J. Inhomogeneous continuum random trees and the entrance boundary of the additive coalescent. PTRF 118 (2000), 455–482.

[5] Chauvin, B., Klein, T., Marckert, J.-F. and Rouault, A. Martingales and profile of binary search trees. Electr. J. Probab. 10 (2005), 420-435.

[6] Drmota, M. *Random Trees.* Springer, Wien, 2009.

[7] Evans, S.N. *Probability and Real Trees.* LNM vol.1920, Springer, Berlin, 2008.

[8] Harris, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Berlin, 1963.

[9] Le Gall, J.-F. Random trees and applications. Probab. Survey. 2 (2005), 245–311.

Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients

小川 重義　（立命館大学）
植村 英明　（愛知教育大学）

(i) Noncausal Itô 過程の確率 Fourier 係数.　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を 1次元 Wiener 空間とする。非因果的過程 $a(t,\omega), b(t,\omega)$ に対して $dX_t = b(t,\omega)dt + a(t,\omega)dW_t$ で定義される確率過程 X_t を noncausal Itô 過程と呼ぶ。ここで dW_t は非因果的確率積分を意味する。$L^2([0,1],dt)$ の完全正規直交基底 $\{\varphi_n(t)\}$ に対して,

$$\mathcal{F}_n(dX) = \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} dX_t \left(= \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} a(t,\omega) dW_t + \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} b(t,\omega) dt \right) \tag{1}$$

を X_t の $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 Fourier 係数と呼ぶ ($\overline{z}$ は z の複素共役)。ただし上の dX_t による積分は Riemann 和の極限として定義する。

本講演では三角関数系 $\{e_k(t) := \exp\{2\pi\sqrt{-1}kt\},\ k \in \mathbb{Z}\}$ に対する確率 Fourier 係数 $\mathcal{F}_n(dX)$ による $a(t,\omega), b(t,\omega)$ の再現可能性についての考察結果を報告する。(1) の正確な定義のために次の準備を行う。

(ii) Skorokhod 積分.　$f(t,\omega) \in L^2([0,1]\times\Omega, dt \times dP)$ は次の Wiener-Itô 展開を持つ。

$$f(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t)).$$

ここで $I_n(k_n^f(t))$ は $k_n^f(t)$ を被積分関数とする n 重 Wiener 積分を表す：

$$\begin{cases} k_n^f(t) = k_n^f(t; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ I_n(k_n^f(t)) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n^f(t; t_1, t_2, \dots, t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}. \end{cases}$$

ただし $k_n^f(t)$ は $L^2([0,1]^n, dt_1 \cdots dt_n)$ の元で $t_1, t_2, \dots, t_n$ に関して対称なものとする。

$$E[|f(t,\omega)|^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! |k^f(t;\cdot)|_n^2 \quad (|k^f(t,\cdot)|_n \text{は}\ k^f(t;\cdot)\ \text{の}\ L^2([0,1]^n, dt_1\cdots dt_n)\ \text{ノルム})$$

に注意する。ここで $f(t,\omega)$ の Skorokhod 積分 $\int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ を次で定義する。

$$\int_0^1 f(t,\omega) dW_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(k_n^f(\cdot)^{\sim}).$$

ただし $k_n^f(\cdot)^{\sim}$ は $k_n^f(\cdot)$ の対称化を表す。また $g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^g(t_1 \dots, t_n))$ に対して, $D_t g(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n-1}(n k_n^g(t_1 \dots, t_{n-1}, t))$ と定義する。

$$\mathcal{L}^{2,1} = \left\{ f(t,\omega) \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! |k_n^f|_{n+1}^2 < \infty \right\}, \quad \mathcal{L}^{2,2} = \left\{ f(t,\omega) \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)! |k_n^f|_{n+1}^2 < \infty \right\}$$

($|k_n^f|_{n+1}^2 = \int_0^1 |k^f(t;\cdot)|_n^2 dt$) とおくと，$f(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,1}$ の Skorokhod 積分 $\int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ は $L^2(\Omega, dP)$ の元として定まる。

(iii) Bohr 畳み込みによる再現定理.

定理 1. $a(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,2}$, $b(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,1}$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k+\ell=n, |\ell|\le N} \left(\int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_k(t)}dW_t + \int_0^1 b(t,\omega)\overline{e_k(t)}dt \right) \int_0^1 \overline{e_\ell(t)}dW_t \\
&= \int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_n(t)}dt \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, dP).
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

これは次の命題から導かれる。($b(t,\omega)$ についての同様の命題は講演時に述べる。)

命題 1. $a(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,2}$, $e(t) \in L^2([0,1], dt)$ に対して次式が $a.s.$ に成立する。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 a(t,\omega)dW_t \int_0^1 e(t)dW_t \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 a(s,\omega)dW_s \right) e(t)dW_t + \int_0^1 \left(\int_0^1 D_t a(s,\omega)dW_s \right) e(t)dt + \int_0^1 a(t,\omega)e(t)dt.
\end{aligned}
$$

(iv) $a(t,\omega), b(t,\omega) \in L^p(dP)$ の場合. $p \in (1,2)$ のとき，X_t は Skorokhod 積分では定義できない。そこでこの場合には確率積分項 $\int dW_t$ は Malliavin 解析における divergence としてとらえる。さらに $p \in (1,\infty)$ とする。Hilbert 空間 K に対して Watanabe 空間 $\mathbb{D}_p^\alpha(K)$ を考える：

$$
\mathbb{D}_p^\alpha(K) = (I-L)^{-\alpha/2} L^p(\Omega \to K, dP) \quad (p \in (1,\infty), \alpha \in \mathbf{R})
$$

ここで L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素を表す。するとこの状況下においても次の定理が成り立つ。

定理 2. $p \in (1,\infty)$,$\alpha \in \mathbf{R}$ とし，$a(t,\omega) \in \mathbb{D}_p^{\alpha+2}(L^2([0,1] \to \mathbf{C}))$, $b(t,\omega) \in \mathbb{D}_p^{\alpha+1}(L^2([0,1] \to \mathbf{C}))$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k+\ell=n, |\ell|\le N} \left(\int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_k(t)}dW_t + \int_0^1 b(t,\omega)\overline{e_k(t)}dt \right) \int_0^1 \overline{e_\ell(t)}dW_t \\
&= \int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_n(t)}dt \quad \text{in} \quad \mathbb{D}_p^\alpha(\mathbf{C}).
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

参考文献

[1] S. Ogawa, *On a stochastic Fourier transformation* Stochastics, 85-2 (2013), 286–294.

[2] S. Ogawa & H. Uemura, *On a stochastic Fourier coefficient — case of noncausal functions —*, *to appear in* Journal of Theoretical Probability.

[3] S. Ogawa & H. Uemura, *Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients*, preprint.

Stochastic Coulomb systems in infinte-dimensions

2013/9/22/月　　長田博文 (九州大学)

Stochastic Coulomb systems in infinte-dimensions とはユークリッド空間内の無限粒子系で、d 次元空間において、e 次元クーロンポテンシャルによって相互作用するものである。ここでは平衡移動不変なものを考えまた、逆温度を β と置くことにする。とくに $d = e$ の場合が興味深く、strict stochastic Coulomb systems in infinte-dimensions と呼ぶことにする。

この設定で考えた場合、結果として得られる無限粒子系は、クーロンポテンシャルの相互作用の遠方での強さによって、従来の Gibbs 測度（Ruelle クラスのポテンシャルで相互作用する）とは、異なる様相を見せる。この講演においては、その幾何的および力学的性質について語る。

実は、現時点で構成されている strict stochastic Coulomb systems in infinte-dimensions は、Ginibre 点過程、つまり $(d, e, \beta) = (2, 2, 2)$ の場合だけである。

Ginibre 点過程に対して、幾何的には、restore Palm density 公式が成り立つ。そして、その応用として、力学的には、tagged 粒子が、劣拡散的であることが分かる。

この結果は、2006 年に講演者が得た予想を肯定的に解決するもので有る。また、2007 年に講演者は一般次元の strict Coulomb 力学系に対し、逆温度 β の値に応じて、tagged 粒子の力学的性質が著しく変化するという、相転移予想を得たが、それの対象として、現時点で唯一存在する点過程（Ginibre 点過程）にたいして、予想を肯定するものである。

参考文献

o.tp

[1] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

o.isde

[2] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

o.rm

[3] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Annals of Probability, Vol **41**, (2013) pp 1-49.

o.rm

[4] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Processes and related fields, Vol **123**, (2013) pp 813-838.

o-shirai.palm

[5] Osada, H., Shirai, T., *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, (preprint)

o-restore.palm

[6] Osada, H., *Palm decomposition and restore density formulae of the Ginibre point process*, (in preparation)

o.sub

[7] Osada, H., *Sub diffusivity of tagged paricles of Ginibre interacting Brownian motiuons*, (in preparation)

Asymptotic Expansion of A Gaussian Integral of the Chern-Simons Lagragian

Itaru Mitoma

Let M be a compact oriented smooth 3-manifold, G a simply connected, connected compact simple Lie group, $\mathfrak{g}$ the associated Lie algebra and $\Omega^r(M, \mathfrak{g})$ the space of $\mathfrak{g}$-valued smooth r-forms on M with the inner product $(\ ,\ )$. We may identify $\mathcal{A}$ of connections on a principal G-bundle over M with $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$.

The *Chern-Simons integral* of the *Wilson line* $F(A)$ is given by

$$\int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} F(A)\, e^{L(A)}\, \mathcal{D}(A), \tag{0.1}$$

where the Chern-Simons Lagrangian L is defined by

$$L(A) = -\frac{\sqrt{-1}k}{4\pi} \int_M \mathrm{Tr}\left\{ A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right\}.$$

Here $\mathcal{D}(A)$ is the *Feynman measure* integrating over all gauge orbits, Tr denotes the trace in the adjoint representation of the Lie algebra $\mathfrak{g}$, and the parameter k is a positive integer called the *level of charges*.

Then we replace $\mathcal{D}(A)$ by a standard Gaussian measure, which is called a Gaussian integral of the Chern-Simons Lagrangian.

Let Q_{A_0} be a twisted Dirac operator coming from the Lorentz gauge fixing of (0.1) and λ_i and $e_i = (e_i^A, e_i^\phi)$, $i = 1, 2, \ldots$ the eigenvalues and eigenvectors of Q_{A_0}.

For a sufficiently large integer p, we define the Hilbert subspace $H_p(\Omega_+)$ of $L^2(\Omega_+) = L^2\left(\Omega^1(M, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^3(M, \mathfrak{g})\right)$ with new inner product $(\ ,\ )_p$ defined by

$$\big((A, \phi),\ (B, \varphi)\big)_p = \left(A,\ \left(I + Q_{A_0}^2\right)^p B\right) + \left(\phi,\ \left(I + Q_{A_0}^2\right)^p \varphi\right),$$

where I is the identity operator on $L^2(\Omega_+)$.

Now, let $H = H_p(\Omega_+)$ and (B, H, μ) an abstract Wiener space.

Let denote ϵ-regularized Wilson line by $F_{A_0}^\epsilon(x)$, (Mitoma-Nishikawa) and the regularized determinant coming from the Lorentz gauge fixing, by $\det_{Reg}(x)$, (Albeverio-Mitoma).

From now on, we use the brief notations such that

$$\beta_j = \left(1 + \lambda_j^2\right)^{-p/2}, h_j = \beta_j e_j \quad \text{and} \quad a_j = \beta_j^2 \lambda_j.$$

Then a Gaussian integral of the Chern-Simons Lagrangian in an abstract Wiener space setting is defined by

$$
(0.2) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{Z_G}\int_B \widetilde{F}^{\epsilon}_{A_0}(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}x)\exp\left[i\sqrt[3]{k}CS(x)\right] \\ &\times \exp\left[i\sum_{abc=1}^{\infty}\langle x,h_a\rangle\langle x,h_b\rangle\langle x,h_c\rangle\beta_a\beta_b\beta_c T_{abc}\right]\mu(dx), \end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
Z_G &= \int_B \exp\left[i\sqrt[3]{k}CS(x)\right]\mu(dx), \\
\widetilde{F}^{\epsilon}_{A_0}(x) &= F^{\epsilon}_{A_0}(x)\det{}_{Reg}(x), \\
CS(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j\langle x,h_j\rangle^2 < +\infty, \\
T_{abc} &= -\int_M \mathrm{Tr}\,\frac{1}{6\pi}e^A_a\bigwedge e^A_b\bigwedge e^A_c,
\end{aligned}
$$

and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the bilinear form of B and its dual space B^*.

By the Fujiwara-Kumano-go method [1, 2], we obtain

Theorem. *If we take for sufficiently large p of H_p in the abstract Wiener space, we have the following asymptotic expansion up to order $2N$:*

$$
\begin{aligned}
&(0.2) = \widetilde{F}^{\epsilon}_{A_0}(0) \\
&+\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{r=1}^{s}\left(\sum_{1\le j_1<j_2<j_3\cdots<j_r<\infty}\left(\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_r\ge 1, m_1+m_2+\cdots+m_r=s}\right.\right.\right. \\
&\left(\left(\prod_{q=1}^{r}\frac{1}{2^{m_q}m_q!(1-2i\sqrt[3]{k}a_{j_q})^{m_q}}\nabla^{2m_q}_{h_{j_q}}\right)\right. \\
&\left.\left.\left.\left.\widetilde{F}^{\epsilon}_{A_0}(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}x)\exp\left[i\sum_{abc=1}^{\infty}\langle x,h_a\rangle\langle x,h_b\rangle\langle x,h_c\rangle\beta_a\beta_b\beta_c T_{abc}\right]\right)(0)\right)\right)\right) \\
&+O\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{16N+16}\frac{\beta_j^2}{|1-2i\sqrt[3]{k}a_j|}\right)^{N+1}\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

for sufficiently large k.

References

[1] D. Fujiwara, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, Nagoya Math. J. **124** (1991), 61-97.

[2] N. Kumano-go, Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation, Bull. Sci. Math. 128 (2004), 197-251.