ある積分方程式の解の確率表現

A Probabilistic Representation of Solutions to A Class of Integral Equations

道工勇 (Isamu Dôku) 埼玉大学 (Saitama Univ.） e-mail: idoku@mail.saitama-u.ac.jp

$D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とし, $\alpha \cdot \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3)$ で内積を表し, $e_x = x/|x|$, $(x \in D_0)$ と定める．未知関数 $u \equiv u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$ に関する下記の積分方程式を考える．

$$\begin{aligned} e^{\lambda t|x|^2} u(t,x) &= u_0(x) + \frac{\lambda}{2} \int_0^t ds\ e^{\lambda s|x|^2} \int p(s,x,y;u) n(x,y) dy \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\lambda s|x|^2} f(s,x) ds, \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D_0 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $\lambda > 0$, $u_0 : D_0 \to \mathbb{C}^3$, $u(t,x)|_{t=0} = u_0(x)$, $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$, $f(t,x)/|x|^2 = \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $p(t,x,y;u) = u(x,y) \cdot e_x \ \{u(t, x-y) - e_x(u(t,x-y) \cdot e_x)\}$ である．一方, マルコフ核 $K : D_0 \to D_0 \times D_0$ を元 $z \in D_0$ に対して, $K_z(dx,dy) \in \mathcal{P}(D_0 \times D_0)$ であって, 正値可測関数 $h = h(x,y)$ に対して, $D_0 \times D_0$ 上の可測関数 $k > 0$ がとれて $\iint h(x,y) K_z(dx,dy) = \int h(x, z-x) k(x,z) dx$, $k(x,y) = i|x|^{-2} n(x,y)$ と定め, $\mathbb{R}^+$ 上の任意の可測関数 $f, g > 0$ に対して

$$\int h(|z|)\nu(dz) \int g(|x|) K_z(dx,dy) = \int g(|z|)\nu(dz) \int h(|y|) K_z(dx,dy) \tag{2}$$

が成り立つとする．ただし, $\nu(dz) = |z|^{-3} dz$ である．

$\mathbb{C}^3$ 内において, 要素 z の直交部分への射影を $\mathrm{Proj}^z(\cdot)$ と表し, β, γ の $z \in D_0$ に対する $\bigstar$ 積を $\beta \bigstar_{[z]} \gamma = -i\ (\beta \cdot e_z)\ \mathrm{Proj}^z(\gamma)$ と定める．いま分枝率がパラメータ $\lambda|x|^2$ で与えられ, 分枝機構が等確率の 2 元的なもので, 子分枝粒子の挙動（分布）が K_x で定まる, 空間 D_0 上の連続時間 2 元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ を考える．このとき, この $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造に着目して, マーク付き樹木 $\omega = (t, (t_m), (x_m), (\eta_m), m \in \mathcal{V})$ の空間を Ω とする．また $P_{t,x}$ を Ω 上の確率測度で時間逆進行の $Z^{K_x}(t)$ の法則とする．ここで t は共通の祖先が誕生した時刻とし, $\eta_m = 0$ で粒子 x_m は死滅し, $\eta_m = 1$ で 2 つの子孫 x_{m1}, x_{m2} を生成するものとする．ただし, $\mathcal{V} = \cup_{\ell \geq 0} \{1,2\}^\ell$ は樹形構造を記述するための長さ ℓ の有限記号系列であるラベル全体の集合である．$\Omega \ni \omega$ に対して, $\mathcal{N}(\omega)$ で樹形分岐点となる節点のラベル全体, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{N}(\omega) \ni m$ の直属の節点が $\mathcal{N}(\omega)$ に入るものの中で正時間部分 $t_m(\omega) > 0$ を $N_+(\omega)$, 非負時間部分 $t_m(\omega) \leqslant 0$ を $N_-(\omega)$ と表し, $N(\omega) = N_+(\omega) \cup N_-(\omega)$ とする．つぎに $\Theta^m(\omega)$ は $m \in N_+(\omega)$ なら $\tilde{f}(t_m(\omega), x_m(\omega))$, $m \in N_-(\omega)$

なら $u_0(x_m(\omega))$ を表すとする．このとき，$\Xi^{m_1}_{m_2.m_3}(\omega) \equiv \Xi^{m_1}_{m_2,m_3}[u_0,f](\omega) := \Theta^{m_2}(\omega) \bigstar_{[x_{m_1}]} \Theta^{m_3}(\omega)$ と定める．ただし，積の順序は自然順序 $\prec$ に関して lexicographically に $m \prec m'$ のとき m のものが左に，m' のものが右にくるように書き表すものとする．また $m \in \mathcal{V}$ が樹形の単独端点のラベルのとき，$\Xi^{\emptyset}_{m,\emptyset}(\omega) = \Theta^m(\omega)$ とする．$\mathcal{N}(\omega)$ における各節点で，上述のような設定の下で $\bigstar$ 積を帰納的に実行して得られる量（樹状 $\bigstar$ 積汎関数）を

$$M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega) = \prod \bigstar_{[x_{\tilde{m}}]} \Xi^{m_1}_{m_2.m_3}[u_0,f](\omega) \tag{3}$$

と表す．ここで $m_1 \in \mathcal{N}(\omega)$, $m_2, m_3 \in N(\omega)$ であり，(3) 式の $\bigstar$ 積 $\prod_{\bigstar}$ は $|m_1| = \ell$ のとき $\tilde{m} \in \mathcal{N}(\omega) \cap \{|\tilde{m}| = \ell - 1\}$ なる $x_{\tilde{m}}$ に関して $\bigstar$ 積を lexicographical な順にとることを意味する．

一方，２元的樹木の節点 (x_m) に依って索引付けられた，重み (U,F) 付き樹状 $*$ 積汎関数 $M^{\langle U,F\rangle}_*(\omega)$ を構成する．ここで U (F) はそれぞれ D_0 $(\mathbb{R}_+ \times D_0)$ 上の非負可測関数で，各 x ごとに $F(\cdot,x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ である．また汎関数構成時の積は通常の乗数積 $*$ をとったものである．

定理． $|u_0(x)| \leqslant U(x)$, $|\tilde{f}(t,x)| \leqslant F(t,x)$, $(\forall t, x)$, かつ $\forall t > 0$ に対して，$E_{t,x}[M^{\langle U,F\rangle}_*] < \infty$, a.e.-$x$ を仮定する．このとき，２元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造から決まる節点のラベル集合により索引付けられた，ある適当な重み (u_0,f) 付き樹状 $\bigstar$ 積汎関数 $M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega)$ が存在して，$u(t,x) = E_{t,x}[M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}]$ は積分方程式 (1) の一意解である．ただし $E_{t,x}$ は確率測度 $P_{t,x}$ による期待値を表す．

References.

[1] Aldous, D. The continuum random tree I. & III. AP 19 (1991), 1–28; ibid. 21 (1993), 248–289.

[2] Aldous, D. Tree-based models for random distribution of mass. J. Stat. Phys. 73 (1993), 625–641.

[3] Aldous, D. and Pitman, J. Tree-valued Markov chains derived from Galton-Watson processes. Ann. Inst. Henri Poicaré 34 (1998), 637–686.

[4] Aldous, D. and Pitman, J. Inhomogeneous continuum random trees and the entrance boundary of the additive coalescent. PTRF 118 (2000), 455–482.

[5] Chauvin, B., Klein, T., Marckert, J.-F. and Rouault, A. Martingales and profile of binary search trees. Electr. J. Probab. 10 (2005), 420-435.

[6] Drmota, M. *Random Trees.* Springer, Wien, 2009.

[7] Evans, S.N. *Probability and Real Trees.* LNM vol.1920, Springer, Berlin, 2008.

[8] Harris, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Berlin, 1963.

[9] Le Gall, J.-F. Random trees and applications. Probab. Survey. 2 (2005), 245–311.