Lyons' extension theorem via fractional calculus

伊藤悠 (Yu Ito)

京都大学 情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

本講演では，Lyons の拡張定理 (または第 1 基本定理) と呼ばれるラフパス解析の基本定理について，fractional calculus に基づく別証明を取り扱う．

まず，Lyons の拡張定理を紹介するためにいくつか準備をする．単体 $\Delta_T := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ から $T^{(k)}(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{j=0}^{k}(\mathbb{R}^d)^{\otimes j}$ への $X^0_{s,t} = 1$ なる連続写像全体の集合を $C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ と記す．$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ が，任意の $j = 0, 1, \ldots, k$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{j} X^i_{s,u} \otimes X^{j-i}_{u,t} = X^j_{s,t} \quad \forall s,u,t \in [0,T], \quad s \leq u \leq t$$

を満たすとき，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k)$ を k 次の乗法的汎関数と呼ぶ．$\beta \in (0,1]$ とする．$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ が，任意の $j = 1, \ldots, k$ に対して，

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|X^j_{s,t}|}{(t-s)^{j\beta}} < \infty$$

を満たすとき，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^k)$ は有限な β-Hölder 評価を持つという．例えば，区間 $[0,T]$ から $\mathbb{R}^d$ への Lipschitz 連続関数 x に対して，反復積分

$$X^j_{s,t} = \int_{s<u_1<\cdots<u_j<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_j}$$

で定まる $X = (1, X^1, \ldots, X^k) \in C_0(\Delta_T, T^{(k)}(\mathbb{R}^d))$ は，k 次の乗法的汎関数であり有限な 1-Hölder 評価を持つことが知られている．本講演では，これを x の step-k signature と呼ぶことにする．以下が Lyons の拡張定理である（正確な主張は [3, Theorem 2.2.1] を参照)．

Lyons の拡張定理. $X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を有限な β-Hölder 評価を持つ $\lfloor 1/\beta \rfloor$ 次の乗法的汎関数とする．このとき，任意の $k \geq \lfloor 1/\beta \rfloor + 1$ に対して，$X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ は有限な β-Hölder 評価を持つ k 次の乗法的汎関数 $(X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}, \ldots, X^k)$ に一意的に拡張される．

この有限な β-Hölder 評価を持つ $\lfloor 1/\beta \rfloor$ 次の乗法的汎関数 $X = (X^0, X^1, \ldots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を (β-Hölder) ラフパスと定義する．つまり，Lyons の拡張定理とは，ラフパスに対して，有限な β-Hölder 評価を持つ乗法的汎関数としての拡張の一意性を与える結果であり，ラフパスという概

念の妥当性を保証するものであるといえる．実際，第 $(\lfloor 1/\beta \rfloor+1)$ レベルパス $X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+1}$ は $\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ で構成され，それ以上のレベルのパス $X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+2}, \dots, X^k$ も同様の方法で帰納的に構成されることが示される．そして，$X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+1}, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor+2}, \dots, X^k$ は $\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ から一意的に定まることが導かれる．その一方で，$\lfloor 1/\beta \rfloor$ レベル以下のパス $X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ をそれらより小さいレベルのパスから一意的に定めることは一般にはできない．そこで，$X = (X^0, X^1, \dots, X^{\lfloor 1/\beta \rfloor})$ を考察の対象とし，これをラフパスと呼ぶのである．また，Lyons [3] による $(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスの構成方法は，rough integral と呼ばれるラフパス解析における線積分の概念を定義する際にも本質的に用いられており，このことからもラフパス解析の基礎理論における Lyons の拡張定理の重要性が分かる．このような理論の基礎を担う結果の別証明に触れることは基本的であり，ラフパス解析の基礎理論を Lyons [3] とは異なる方法で記述する試みという観点からも興味深い．

本講演では，$(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスを fractional calculus に基づき構成することを考える．まず，Lyons [3] による構成方法を概観した後，講演者の得た fractional calculus に基づく構成方法を紹介する．ここで鍵となるのが，次の２つの積分である．１つ目は，講演者 [2] により導入された rough integral の第 1 レベルパスの fractional derivative に基づく表現，２つ目は，Gubinelli [1] により導入された weakly controlled path に対する積分である．Gubinelli [1] の理論はラフパス解析の変種で，weakly controlled path に対する積分が Gubinelli [1] の理論における線積分の概念である．また，Gubinelli [1] の線積分は，Lyons [3] の線積分 (もう少し正確には rough integral の第 1 レベルパス) より被積分関数の定義が一般的であることが知られている．そこで，講演者は，[2] で導入した rough integral の第 1 レベルパスの fractional derivative に基づく表現を weakly controlled path に対する積分に一般化し，Lyons の拡張定理に応用することを考えた．つまり，Gubinelli [1] の理論における線積分に対しても fractional derivative に基づく表現を与え，この線積分の被積分関数がより一般的であるという利点を生かし，$(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスを構成することを試みた．この試みの結果として Geometric (β-Hölder) ラフパスと呼ばれる，step-$\lfloor 1/\beta \rfloor$ signature のラフパス空間の位相における極限として特徴づけられる典型的なラフパスに対しては，fractional calculus に基づく $(\lfloor 1/\beta \rfloor + 1)$ レベル以上のパスの構成方法が得られることとなった．

参考文献

[1] M. Gubinelli, Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.* **216** (2004), 86–140.

[2] Y. Ito, Integrals along rough paths via fractional calculus, Preprint (2013).

[3] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals, *Rev. Math. Iberoamericana* **14** (1998), 215–310.