ピン止め拡散過程と滑らかさの悪い係数を持つ放物型方程式の基本解のヘルダー連続性

楠岡誠一郎
（東北大学大学院理学研究科）

$a(t,x) = (a_{ij}(t,x))$ を $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$-値有界可測関数で一様楕円性を満たすものとする。すなわち、Λ をある正の数、I を単位行列として

$$\Lambda^{-1} I \le a(t,x) \le \Lambda I \tag{1}$$

を満たすものとする。b を $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{R}^d$-値有界可測関数、c を $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の有界可測関数とする。これらの関数に対して、次の 2 階線型放物型偏微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(t,x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) + c(t,x)u(t,x) \\ u(0,x) &= f(x) \end{cases} \tag{2}$$

この方程式 (2) の基本解を $p(s,x;t,y)$ と書くことにする。すなわち、$p(s,x;t,y)$ は

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,x;t,y)u(s,y)dy, \quad s<t,\ x\in\mathbb{R}^d$$

を満たす関数である。仮定 (1) の下では基本解の存在性が知られている。

この型の方程式の基本解の滑らかさに関する研究は 1950 年代からなされている。a が (1) を満たすときの放物型方程式 $\partial_t u = \nabla\cdot a\nabla u$ 基本解のヘルダー連続性については De Giorgi(1957) と Nash(1958) の各氏によって独立に示された。これらの結果では、ある $\alpha\in(0,1]$ が存在し、基本解が α-ヘルダー連続となることが示されていて、この指数 α はハルナック不等式などに現れる数々の定数に依存している。これらの結果は、より一般の放物型方程式 $\partial_t u = \nabla\cdot a\nabla u + b\cdot\nabla u - cu$ の場合に拡張され、同様の結論が得られている (Aronson (1967) または Stroock (1988) を参照のこと)。非局所型生成作用素（対応する確率過程は stable-like process）の場合に対する類似の結果も Chen and Kumagai (2003) によって得られている。

上の手法で基本解のヘルダー連続の指数を得るまでの計算は非常に複雑で具体的な値を計算するのは難しく、指数の下からの評価を得ることも難しい。本講演では、このヘルダー連続の指数の下からの評価を確率論的手法を用いて考える。

$B(x,R)$ を $\mathbb{R}^d$ における中心 x, 半径 R の開球とする。次を仮定する。

$$\sum_{i,j=1}^d \sup_{t\in[0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}(s,x)\right|^\theta e^{-m|x|}dx \le M \tag{3}$$

ここで、微分は弱微分の意味であり、θ は $[d,\infty)\cap(2,\infty)$ の元であるような定数、m と M は非負の定数である。このとき、ソボレフの埋め込み定理により a の空間変数に関する連続性が得られる。すなわち、任意の $R>0$ に対して $[0,\infty)$ 上の非減少連続関数 ρ_R で $\rho_R(0)=0$ と

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\sup_{i,j}|a_{ij}(t,x)-a_{ij}(t,y)| \le \rho_R(|x-y|), \quad x,y\in B(0;R).$$

を満たすようなものが存在する。ここで、仮定 (3) からは a の空間に関する局所ヘルダー連続性が得られないことに注意する。本研究で得られた結果は次の定理である。

定理 1. 任意の $R>0$ と十分に小さい $\varepsilon>0$ に対し、$d,\ \varepsilon,\ m,\ M,\ \theta,\ R,\ \rho_R,\ \Lambda,\ \|b\|_\infty,\ \|c\|_\infty$ に依存する定数 C が存在して

$$|p(0,x;t,y)-p(0,z;t,y)| \le Ct^{-d/2-1+\varepsilon/2}e^{Ct}|x-z|^{1-\varepsilon}$$

が $t\in(0,\infty),\ x,z\in B(0;R/2),\ y\in\mathbb{R}^d$ に対して成り立つ。

定理 1 は基本解 $p(0,x;t,y)$ が x に関して局所 $(1-\varepsilon)$-ヘルダー連続であることを表している。証明の鍵になる手法は Lindvall と Rogers (1986) により導入された確率微分方程式のカップリングである。カップリングの手法を用いることにより、$p(0,x;t,y)$ の x に関するヘルダー連続性を、係数の滑らかさを用いずに、拡散過程の振動を用いて導くことができるということがこの証明のアイデアである。

注意 2. a が単位行列の場合でも b が不連続であるとき、基本解が連続微分可能でない例が知られている。

それでは、証明について少し述べることにする。a が滑らかな場合に、そのときの $(1-\varepsilon)$-ヘルダー連続性に現れる定数が適切な依存性を持っていることを示す。一般の a に対しては滑らかなもので近似すればよい。滑らかな a に対して $\sigma(t,x) := a(t,x)^{1/2}$(行列の平方根) とする。これに対して、次の確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX_t^x &= \sigma(t,X_t^x)dB_t \\ X_0^x &= x. \end{cases} \tag{4}$$

(4) に現れるブラウン運動 B_t が成すフィルトレーションを $\mathscr{F}_t$ と書くことにする。今、a が滑らかだと仮定してあるので (4) には pathwise uniqueness が成り立っていることに注意する。

この X^x を用いて $p(0,x;t,y)$ を表すことを考える。Feynman-Kac の公式と Girsanov 変換を用いることによって、(2) の解 u は

$$u(t,x) = E\left[f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t \langle b_\sigma(s,X_s^x), dB_s\rangle \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2}\int_0^t |b_\sigma(s,X_s^x)|^2 ds + \int_0^t c(s,X_s^x)ds\right)\right]$$

と表せる。ただし、$b_\sigma(t,x) := \sigma(t,x)^{-1}b(t,x)$ である。X^x に対応する基本解を $p^X(s,x;t,y)$ と書くことにし、

$$\mathcal{E}(s,t;X^x) := \exp\left(\int_s^t \langle b_\sigma(u,X_u^x), dB_u\rangle - \frac{1}{2}\int_s^t |b_\sigma(u,X_u^x)|^2 du + \int_s^t c(u,X_u^x)du\right)$$

とし、$P^{X_t^x=y}$ を $X_t^x = y$ という条件の下での確率、$E^{X_t^x=y}$ を $P^{X_t^x=y}$ に関する期待値とすると、

$$p(0,x;t,y) = p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(0,t;X^x)\right] \tag{5}$$

と表すことができる。よって、$p(0,x;t,y)$ の x に関するヘルダー連続性を調べるためには、関数 $x \to p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(0,t;X^x)\right]$ のヘルダー連続性を調べればよいことになる。

$X_t^x = y$ となる確率は 0 であるので、(5) で現れる条件付き期待値の計算は少々複雑であるが、X の基本解 $p^X(s,x;t,y)$ を用いればある程度具体的に計算することができる。実際、$s,t \in (0,\infty)$ で $s<t$ を満たすものとし、$A \in \mathscr{F}_s$ としたとき、

$$P^{X_t^x=y}(A) = \frac{1}{p^X(0,x;t,y)}\int_{\mathbb{R}^d} p^X(s,\xi;t,y)P\left(A \cap \{X_s^x \in d\xi\}\right) \tag{6}$$

が成り立つ。この式 (6) を用いることにより、(5) で現れる条件付き期待値を扱うことができるのである。ただ、当然のことであるが (6) の右辺の被積分関数は $s \uparrow t$ のときに発散する。この発散の度合いを制御するために (3) を仮定していて、この仮定の下では次が成り立つ。

補題 3. τ_1, τ_2 を停止時刻とする。このとき、任意の $q>2$ と十分小さい $\varepsilon>0$ と $t \in (0,\infty)$, $s \in [0,t)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$ に対して、

$$p^X(0,x;t,y)E^{X_t^x=y}\left[\mathcal{E}(s\wedge\tau_1, s\wedge\tau_2;X^x)^q\right] \le Ct^{-d/2-\varepsilon}e^{Cq^2t}$$

が成り立つ。ただし、C は d, ε, m, M, θ, Λ, $\|b\|_\infty$, $\|c\|_\infty$ に依存する定数。

これにより、特に条件付き確率の下で $\mathcal{E}(s,t;X^x)$ は十分良い可積分性を持つことが分かる。あとはカップリングの手法によって得られる x に関する連続性の度合いを調べれば良く、これについて講演で詳しく述べる。