# 周遊路を結合してできる過程の汎関数極限定理

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)

伊藤 [1] の周遊理論によると，原点正則再帰的なマルコフ過程 $X$ を，局所時間 $L$ を用いて原点を起終点とする周遊路に分解するとき，周遊路に値を取るポアソン点過程 $p$ が得られる．その特性測度 $\boldsymbol{n}$ を**周遊測度**と呼ぶ．逆に，周遊測度 $\boldsymbol{n}$ が与えられれば，それを特性測度として持つ周遊路値のポアソン点過程 $p$ をとり，元の過程 $X$ と局所時間 $L$ とを再構成できる．

本講演の目的は，周遊測度列の適切な収束概念を導入し，その収束を仮定して $(X, L)$ の同時分布の極限定理を導くこと，さらにその応用例を与えることである．講演の内容は論文 [3] に基づく．なお，極限定理は昨年の講演と同じで，応用例は新しい結果である．

## 1. 汎関数極限定理の一般論

$E$ を Polish 空間とし，一点 $o \in E$ をとり原点と呼ぶ．$E \setminus \{o\}$ 上の $\sigma$-有限測度 $\nu$ に対し，$\nu$ を特性測度とするポアソン点過程を $(p(l))_{l \in D(p)}$ とする．$l \in [0, \infty) \setminus D(p)$ では $p(l) = o$ として拡張して得られる点過程を $p = (p(l))_{l \geq 0}$ と書き，**原点外ポアソン点過程**と呼ぶ．

$E$ 値 càdlàg path の全体を $D = D_E$ とし，原点に一度到達すると停止する道の全体を $D^o$ と書く．座標過程を $X = (X(t))_{t \geq 0}$ と書き，$T_x = \inf\{t > 0 : X(t) = x\}$ と書く．ずっと原点に留まる path のことも同じ記号 $o$ で表す．$E$ の距離 $d$ について，原点との距離を $|x| = d(x, o)$ と表し，$\|w\| = \sup |w(t)|$ と表す．一般に，$D$ 上の $\sigma$-有限測度 $\boldsymbol{n}$ が 4 条件

**(N0)** $\boldsymbol{n}(D \setminus (D^o \cap \{0 < T_o < \infty\})) = 0$;

**(N1)** $\int_D (T_o \wedge 1) \mathrm{d}\boldsymbol{n} < \infty$;

**(N2)** $\boldsymbol{n}(D) = \infty$;

**(N3)** $\boldsymbol{n}(\|X\| \geq r) < \infty$ for all $r > 0$

を満たすとき，**周遊測度**と呼ぶことにする (拡張された定義)．このとき，$\nu$ を特性測度とする原点外ポアソン点過程 $p$ から狭義増加 Lévy 過程 $\eta(p; l) = \sum_{s \leq l} T_o(p(s))$ が定まる (簡単のため，原点での停留はないものとする)．これより局所時間過程 $L(p; t)$ および周遊路を繋いだ càdlàg 過程 $X(p; t)$ が得られる．なお，上の条件だけだと，一般に $X(p; t)$ はマルコフ過程とは限らない．ここで，法則収束が確率空間の取り換えで概収束にできるという Skorokhod の定理をまねて，周遊測度列の収束概念を与える．

**定義 1.** 列 $\boldsymbol{n}_n$ が $\boldsymbol{n}_\infty$ に**周遊測度の意味で収束する**とは，ある Polish 空間 $\widetilde{E}$ とその上の $\sigma$-有限測度 $\widetilde{\nu}$，および可測写像列 $\Phi_n : \widetilde{E} \to D$ であって以下を満たすことを言う:

**(G1)** $\boldsymbol{n}_n = (\widetilde{\nu} \circ \Phi_n^{-1})|_{D \setminus \{o\}}$ for $n = 1, 2, \ldots$ and $\infty$;

**(G2)** $\Phi_n \to \Phi_\infty$ in $D$, $\widetilde{\nu}$-a.e.;

**(G3)** $T_o(\Phi_n) \to T_o(\Phi_\infty)$ in $[0, \infty]$, $\widetilde{\nu}$-a.e.;

**(G4)** ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_{\widetilde{E}} \left\{1 \wedge \sup_{n \geq N} T_o(\Phi_n)\right\} \mathrm{d}\widetilde{\nu} < \infty$.

**定理 2.** 周遊測度列 $\boldsymbol{n}_n$ が周遊測度 $\boldsymbol{n}_\infty$ に収束すると仮定し，さらに $\boldsymbol{n}_\infty(X(T_o-) \neq o) = 0$ と仮定する．このとき，$\nu_n$ を特性測度とする原点外ポアソン点過程を $p_n$ と書くと，

$$(X(p_n), L(p_n), \eta(p_n)) \xrightarrow{\text{law}} (X(p_\infty), L(p_\infty), \eta(p_\infty)) \quad \text{on } D \times D_{\mathbb{R}} \times D_{\mathbb{R}}. \tag{1}$$

## 2. 自己相似過程の跳入拡張の均質化

[2] においては，拡散過程の跳入拡張に対し，スケール極限における均質化の定理を与えた．それは，speed measure の均質化で Bessel 過程が現れる要素と，跳入測度の均質化でべき測度が現れる要素との混成であった．ここでは後者だけに着目し，はじめから自己相似性を持つ連続流入過程を考え，その跳入拡張に対する均質化の極限定理を与える．

$E = [0,\infty)$ とし，$o = 0$ とする．$\{X, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ は原点正則再帰的マルコフ過程で，$\boldsymbol{n}(X(0) \neq 0) = 0$ および $\boldsymbol{n}(X(T_0-) \neq 0) = 0$ を仮定する．さらに，任意の点 $x$ で $\boldsymbol{n}(T_x < T_0) > 0$ を仮定する．定数 $1 < b < c$ と $0 < \psi < 1$ が存在して以下を満たすとする:

**(S1)** $\{\Psi X, \mathbb{P}_x\} \overset{\text{law}}{=} \{X, \mathbb{P}_{\psi x}\}$ for all $x$. 但し，$(\Psi w)(t) = \psi w(ct)$;

**(S2)** $\{b^{-1}L(c\cdot), \mathbb{P}_0\} \overset{\text{law}}{=} \{L, \mathbb{P}_0\}$.

$\xi$ を非負 $\mathcal{F}_{0+}$-可測汎関数で $\xi \circ \Psi^{-1} = \xi$ なるものとし，$j$ を $(0,\infty)$ 上の測度として，

$$\boldsymbol{n}_{\xi,j}(\mathrm{d}w) = \xi(w)\boldsymbol{n}(\mathrm{d}w) + \int_{(0,\infty)} j(\mathrm{d}x)\mathbb{P}^o_x(\mathrm{d}w) \tag{2}$$

と定める．但し，$\mathbb{P}^o_x$ は原点停止過程の分布とする．$\boldsymbol{n}_{\xi,j}$ が周遊測度であるとき，対応する過程を $\{X_{\xi,j}, L_{\xi,j}, \eta_{\xi,j}\}$ と書く．

**定理 3 (small jumping-in).** 以下を仮定する:

**(S3-a)** $\boldsymbol{n}(D \setminus [D_{1,x} \cup D_{2,x}]) = 0$ for all $x > 0$.

但し，$D_{1,x} = \{T_{\psi^n x} \to 0\}$, $D_{2,x} = \{\liminf T_{\psi^n x} \geq T_o\}$.

**(C-a)** $\xi^*(w) = \xi(w) + \displaystyle\int_{E\setminus\{o\}} \frac{j(\mathrm{d}x)}{\sigma(x)} 1_{D_{1,x}}(w)$ とおくとき，$\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ も周遊測度.

このとき，$\boldsymbol{n}^{(n)}_{\xi,j} := b^n \boldsymbol{n}_{\xi,j} \circ (\Psi^n)^{-1}$ は周遊測度の意味で $\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ に収束する．さらに，

$$\left\{\Psi^n X_{\xi,j}, b^{-n}L_{\xi,j}(c^n\cdot), c^{-n}\eta_{\xi,j}(b^n\cdot)\right\} \xrightarrow{\text{law}} \left\{X_{\xi^*,0}, L_{\xi^*,0}, \eta_{\xi^*,0}\right\} \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3}$$

仮定が煩雑になるが，跳びのみの過程に収束する場合の定理も与える．

例として，正値自己相似過程であって Lamperti 変換で対応する Lévy 過程がスペクトル負のものを扱う．また，少し修正した定理の例として，Walsh のブラウン運動も扱う．

なお，Sierpiński gasket/carpet 上のブラウン運動でも，$\boldsymbol{n}(D \setminus D_{1,x}) = 0$ が言えれば類似の結論が得られるのだが，今のところわからない．

## 参考文献


[1] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the 6th Berkeley Sympo., Vol. III: Probability theory*, 225–239, 1972.

[2] K. Yano. Convergence of excursion point processes and its applications to functional limit theorems of Markov processes on a half-line. *Bernoulli*, 14(4):963–987, 2008.

[3] K. Yano. Functional limit theorems for processes pieced together from excursions. In preparation.