Distributions of hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions

(濱名裕治氏，白井朋之氏との共同研究に基づく) [1]

松本裕行 (青山学院大学)

§1. 分布関数と尾確率

$\{R_t^{(\nu)}\}$ を指数 ν(または $2\nu+2$ 次元) の Bessel 過程とし，生成作用素を $\mathscr{G}^{(\nu)}$ と書く：

$$\mathscr{G}^{(\nu)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{2x}, \qquad x > 0.$$

境界 0 は，$\nu \geqq 0$ のとき流入，$-1 < \nu < 0$ のとき正則，$\nu \leqq -1$ のとき流出である．

$R_0^{(\nu)} = a$ のとき $b \geqq 0$ への到達時刻を $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ と書く．

$\lambda > 0$ のとき，$[b,\infty) \ni x \mapsto u(x) = E[\exp(-\lambda\tau_{x,b}^{(\nu)})]$ は，固有値問題 $\mathscr{G}^{(\nu)}u = \lambda u$ の x について単調減少で $u(b) = 1$ をみたす解であり，$0 < b < a$ であれば

$$E[\exp(-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)})] = \frac{a^{-\nu}K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu}K_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$$

が成り立つ．$0 < a < b$ の場合は，Macdonald 関数とも呼ばれる第 2 種変形 Bessel 関数 K_ν を第 1 種変形 Bessel 関数 I_ν におき変えればラプラス変換の表示が得られる．a, b の一方が 0 のときも同様であるが，ここでは省略する．

まず，このラプラス変換の逆変換を実行して到達時刻 $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の分布関数の具体形を与え，尾確率の漸近挙動が得られることを示す．$0 < a < b$ のときは，自然境界 ∞ を考える必要がなく，結果はよく知られているので省略する．Kent(ZW, 1980) を参照されたい．

定理 1． $0 < b < a$ とする．$|\nu| > 3/2$ であり ν が整数でないなら，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) = & \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+|\nu|} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} ds \\
& - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \sum_{j=1}^{N(\nu)} \frac{K_\nu(a z_{\nu,j}/b)}{z_{\nu,j}K_{\nu+1}(z_{\nu,j})} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s} + \frac{(a-b)z_{\nu,j}\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} ds \\
& - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} L_{\nu,a/b}(x)}{x} dx\right] ds.
\end{aligned}$$

ここで，$z_{\nu,j}$ $(j = 1, 2, ..., N(\nu))$ は $K_\nu(z)$ の零点であり，関数 $L_{\nu,c}$ は次で与えられる：

$$L_{\nu,c}(x) = \frac{\cos(\pi\nu)\{I_\nu(cx)K_\nu(x) - I_\nu(x)K_\nu(cx)\}}{K_\nu(x)^2 + \pi^2 I_\nu(x)^2 + 2\pi\sin(\pi\nu)K_\nu(x)I_\nu(x)}.$$

---

[1] 濱名-松本 (Trans AMS(2013)，J.Math-for-Industry(2012), 投稿中)，濱名-松本-白井 (preprint).

$|\nu| < 3/2$ のときは K_ν は零点をもたず右辺の第 2 項は現れない，ν が整数のときは右辺の第 3 項は現れないなどの違いはあるが，すべての場合について分布関数の具体形を K_ν の零点および変形 Bessel 関数に関する積分によって与えることができる．

系． $0 < b < a$ のとき, $\nu > 0$ は整数ではない[2]とすると，$t \to \infty$ のとき次が成り立つ：

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu} - \left(\frac{b^3}{2a}\right)^{\nu}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu}\right\}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-\nu} + o(t^{-\nu}).$$

その他の場合も同様に尾確率の漸近挙動を示すことができる．

到達時刻の確率密度に関しても，分布関数に関する表現，漸近挙動の両辺を形式的に微分すれば結果が得られ，実際に証明することができる．

§2. Lévy 測度

$\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の確率分布は無限分解可能である．次の等式から $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の Lévy 測度の具体形を与えることができる．$G_\nu(x) = K_\nu(x)^2 + \pi^2 I_\nu(x)^2 + 2\pi\sin(\pi\nu)K_\nu(x)I_\nu(x)$ とおくと，次が成り立つ：

$$\frac{K_{\nu+1}(z)}{K_\nu(z)} = 1 + \frac{2\nu}{z} + \sum_{j=1}^{N(\nu)}\frac{1}{z_{\nu,j} - z} + \cos(\pi\nu)\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+z)G_\nu(x)}. \tag{*}$$

定理 2． $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の Lévy 測度 $m_{a,b}^{(\nu)}$ は次で与えられる Lebesgue 測度に関する密度をもつ：

$$\begin{aligned}\frac{m_{a,b}^{(\nu)}(ds)}{ds} =& \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi s^3}}\sum_{j=1}^{N(\nu)}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4s}}\left(e^{\frac{z_{\nu,j}\xi}{\sqrt{2a}}} - e^{\frac{z_{\nu,j}\xi}{\sqrt{2b}}}\right)d\xi \\ &+ \frac{\cos(\pi\nu)}{2\sqrt{\pi s^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\eta G_\nu(\eta)}e^{-\frac{\xi^2}{4s}}\left(e^{-\frac{\xi\eta}{\sqrt{2a}}} - e^{-\frac{\xi\eta}{\sqrt{2b}}}\right)d\xi d\eta, \qquad s > 0.\end{aligned}$$

§3. Wiener sausage への応用

等式 (*) の応用を 2 つ述べる．第 1 は，Wiener sausage の体積の期待値である．$\{B_t\}$ を $B(0) = 0$ である d 次元 Brown 運動とし，半径 $r > 0$ の球に付随する Wiener sausage を $W(t)$ と書く：$W(t) = \{y \in \mathbf{R}^d\ ;\ |y - B(s)| < r$ をみたす $s \in [0,t]$ が存在する $\}$.

U_r を原点中心，半径 r の球とすると，$W(t)$ の体積 $|W(t)|$ の期待値は

$$E[|W(t)|] = |U_r| + L^{(d)}(t), \qquad \text{ただし，}\quad L^{(d)}(t) = \int_{\mathbf{R}^d\setminus U_r} P_x(\tau \leqq t)dx$$

によって与えられることが知られている．ここで，P_x は x を出発点とする Wiener 測度，$\tau = \inf\{t \geqq 0; B(t) \in U_r\}$ $(\overset{(\mathrm{law})}{=} \tau_{|x|,r}^{((d/2)-2)})$ であり，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_x(\tau \leqq t)dt = \frac{|\partial U_r|}{\sqrt{2\lambda^3}}\frac{K_{d/2}(r\sqrt{2\lambda})}{K_{d/2-1}(r\sqrt{2\lambda})}$$

[2] ν が整数でも異なる表現をもつ定数に対して結果が得られるが，定数の一致が証明できていない．

が成り立つ．d が奇数であれば $K_{d/2}$ は初等関数であり，$d=1,3$ の場合の結果はよく知られている．d が大きい場合は濱名氏 (JMSJ, 2010) が具体形，漸近挙動を示した．

上の等式 (*) を用いることにより，d が偶数の場合に次を得た．

定理３． (1) $d=2$ のとき，

$$L^{(2)}(t)=2\pi r\left[\sqrt{\frac{2t}{\pi}}+\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{xy-1+e^{-xy}}{y^3G_0(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].$$

(2) $d=4$ のとき，

$$L^{(4)}(t)=2\pi^2r^2\left[t+\frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1-e^{-xy}}{y^3G_1(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].$$

(3) d が 6 以上の偶数のとき，

$$\begin{aligned}L^{(d)}(t)=&S_{d-1}r^{d-2}\left[\frac{(d-2)t}{2}+\frac{r^2}{d-4}-\frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^{N_d}\frac{1}{(z_j^{(d)})^2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}+z_j^{(d)}x}dx\right.\\&\left.+\frac{(-1)^{d/2-1}\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-xy}}{y^3G_{(d-2)/2}(y)}e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}dxdy\right].\end{aligned}$$

$t\to\infty$ のときの漸近挙動が興味深いので，講演中に述べる．

§4. K_ν の零点のみたす代数方程式

ここまでは，確率論的な諸量に対する K_ν の零点を用いた表示を与えた．最後に，等式 (*) から零点に対する代数方程式が得られることを示す．

$K_\nu(z)$ の $z\to\infty$ のときのよく知られた漸近展開を用いると，(*) の左辺の漸近展開ができる．右辺は簡単な形をしているので，その漸近展開は容易である．これらを合わせると，帰納的に定まる実数列 $\{a_n\}$ が存在して，($a_0=1,\ a_1=\nu+\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4}),$
$a_3=-\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4}),\ a_4=-\frac{1}{8}(\nu^2-\frac{1}{4})(\nu^2-\frac{25}{4}),\ a_5=\frac{1}{2}(\nu^2-\frac{1}{4})(\nu^2-\frac{13}{4}),...$)

$$\sum_{j=1}^{N(\nu)}(z_{\nu,j})^n=-a_{n+1}+(-1)^n\cos(\pi\nu)\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{G_\nu(x)}dx\quad(n=1,2,...)$$

が成り立つことが分かる．

右辺の積分に対する数値計算は各種の方法により可能で，この代数方程式の数値解も得られる．結果の一部を講演中に与える．

(*) の両辺の $z\to0$ としたときの漸近展開も可能であり，これから零点の逆数 $(z_{\nu,j})^{-1}$ に対する代数方程式を得る．零点に対して同じ数値解が得られ，結果の確認ができる．