# Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion

永沼 伸顕 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

## 1　はじめに

本講演では，非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解を Crank-Nicholson 近似により近似した場合の近似誤差に関する結果を報告する．この結果は [1] で与えられた予想を肯定的に解決するものである．

まずは非整数 Brown 運動の定義を与える．

**定義 1.** 実数値確率過程 $B = \{B_t\}_{0\le t\le 1}$ が Hurst 定数 $0 < H < 1$ をもつ非整数 Brown 運動であるとは，$B$ は連続な Gauss 過程であって，平均が 0，分散が

$$\boldsymbol{E}[B_s B_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$$

となるものをいう．

この定義から，$\boldsymbol{E}[|B_t - B_s|^2] = |t-s|^{2H}$，および，パスの $H$ 未満の Hölder 連続性が分かる．さらに，$H \neq 1/2$ のときには，非整数 Brown 運動がセミマルチンゲールにならないことも分かる．これらの事実から，非整数 Brown 運動による確率積分は伊藤積分としては定義できず，通常の確率解析の議論を適用することができない．このような確率微分方程式を駆動過程の Gauss 性を用いて解析することが，本問題の骨子となる．

## 2　設定および結果

本講演では，

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)\, d^\circ B_t, \quad t \in (0,1], \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

なる確率微分方程式を考える．ここで，$\sigma$ は実数値関数，$x_0 \in \mathbf{R}$，$d^\circ B$ は Russo-Vallois の意味での対称積分を表わす．つぎに，Crank-Nicholson 近似 $\{X^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ を

$$\begin{cases} X_0^{(m)} = x_0, \\ X_t^{(m)} = X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)} + \dfrac{1}{2}\left(\sigma\left(X_t^{(m)}\right) + \sigma\left(X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}\right)\right)\left(B_t - B_{\eta^{(m)}(t)}\right), \quad t \in (0,1], \end{cases} \tag{2}$$

で定義する．ただし，$\eta^{(m)}(t) = \sup\{l2^{-m} : 0 \le l2^{-m} < t\}$ である．こうして定められた $X^{(m)}$ は連続な確率過程であることに注意する．

このときに，以下の定理が得られる．

**仮定 2.** (A1) $\sigma \in C_{\mathrm{bdd}}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$，(A2) $\inf|\sigma| > 0$.

**定理 3.** 仮定 2 の下で，$1/3 < H < 1/2$ ならば

$$\lim_{m\to\infty}\left(B, 2^{m(3H-1/2)}(X^{(m)} - X)\right) = \left(B, c_{3,H}\sigma(X_\cdot)\int_0^\cdot \frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\, dW_s\right)$$

が一様位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{3,H}$ は $H$ に依存する定数，$W$ は $B$ とは独立な通常の Brown 運動，$dW$ は通常の伊藤積分を表わす．

## 3 証明

定理 3 の証明の概略を述べる．

まず，[2] に従い，方程式 (1) の解，Crank-Nicholson 近似 (2) の表現を述べる．方程式 (1) の解 $X$ は，$X_t = \phi(x_0, B_t)$ と表される．ただし，$\phi$ は，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = \sigma(\phi(x,y)), \quad y \in \mathbf{R}, \\ \quad \phi(x,0) = x, \end{cases}$$

の解である．そして，仮定 2 の (A2) の下で，Crank-Nicholson 近似 $X^{(m)}$ は，$X^{(m)}_t = \phi(x_0, B_t + U^{(m)}_t)$ と表される．ここで，$U^{(m)}$ は

$$U^{(m)}_t = \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor - 1} \left\{ f_3(X^{(m)}_{j2^{-m}})(\triangle B_{j2^{-m}})^3 + f_4(X^{(m)}_{j2^{-m}}))(\triangle B_{j2^{-m}})^4 + R(X^{(m)}_{j2^{-m}}), \triangle B_{j2^{-m}}) \right\}$$

で定義される確率過程である．ただし，$\lfloor \xi \rfloor$ は $\xi > 0$ の整数部分，$f_3 = (\sigma^2)''/24$，$f_4 = \sigma(\sigma^2)'''/48$，$\triangle B_{j2^{-m}} = B_{(j+1)2^{-m}} - B_{j2^{-m}}$，$R$ は $|R(\xi,h)| \le M|h|^5$ を満たす関数である．[1] は，これらの表現を用いて，定理 3 の限定的な場合を示している．

つぎに，$U^{(m)}$ の漸近挙動を見る．そのために，weighted Hermite variation とよばれる Wiener 汎関数の解析を行う．この weighted Hermite variation は

$$G^{(m)}_q(t) = 2^{-m/2} \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor - 1} \frac{f(B_{(j+1)2^{-m}}) + f(B_{j2^{-m}})}{2} H_q(2^{mH} \triangle B_{j2^{-m}})$$

として定義される．ただし，$f$ は実数値関数，$H_q$ は $q$ 次の Hermite 多項式である．この Wiener 汎関数に対して，Nualart-Peccati による fourth moment theorem を用いることで次が得られる．

**定理 4.** 自然数 $q$ は 2 以上，関数 $f$ は滑らかで導関数は多項式増大を持つとする．このとき，$1/2q < H < 1 - 1/2q$ であれば，

$$\lim_{m\to\infty} \left(B, G^{(m)}_q\right) = \left(B, c_{q,H} \int_0^{\cdot} f(B_s)\, dW_s\right)$$

が Skorohod 位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{q,H}$ は $q$ と $H$ によって決まる正定数，$W$ は $B$ とは独立な通常の Brown 運動である．

最後に，$U^{(m)}$ を $G^{(m)}_3$ を用いて表現し，定理 4 を用いて定理 3 を導く．定理 3 で現れる正定数 $c_{3,H}$ および Brown 運動 $W$ は定理 4 で与えられるものである．

## 参考文献


[1] Neuenkirch, A., Nourdin, I.: Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. J. Theoret. Probab. **20**(4), 871–899 (2007)

[2] Nourdin, I.: A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. In: Séminaire de probabilités XLI, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1934, pp. 181–197. Springer, Berlin (2008)