Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs*

Xueping Huang[†]　塩沢 裕一[‡]

重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の upper rate function を, グラフに適合した距離と体積増大度で特徴づける. ここで upper rate function とは, マルコフ連鎖の法則に従って運動する粒子が, “典型的” にはどの程度遠方へ移動できるのかを表す関数のことである.

まず初めに, Keller-Lenz (2012) に従い, 重み付きグラフの定義を述べる. V を可算無限集合とし, μ を V 上の正値関数とする. このとき, 関数 μ を V 上のラドン測度と見なすことができる. w を $V \times V$ 上の非負値対称関数とし, 任意の点 $x \in V$ について

$$w(x,x) = 0, \qquad \sum_{y \in V} w(x,y) < \infty$$

を満たすものとする. 以上で定まる 3 つ組 (V, w, μ) を**重み付きグラフ**と呼ぶ. 2 点 $x, y \in V$ に対して $w(x,y) > 0$ が成立するとき, x と y は**隣接している**といい, $x \sim y$ とかく. 特に, V の各点が隣接点を有限個しか持たないとき, 重み付きグラフ (V, w, μ) は**局所有限**であるという. 点列 $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ は, $x_0 = x$, $x_n = y$, $x_{k-1} \sim x_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ を満たすとき, x と y を結ぶ**道**であるという. 特に任意の相異なる 2 点 $x, y \in V$ を結ぶ道が存在するとき, 重み付きグラフ (V, w, μ) は**連結**であるという.

以下では (V, w, μ) を局所有限で連結な重み付きグラフとする. V 上の関数で, 有限個の点以外では値 0 をとるもの全体の集合を $C_0(V)$ とする. このとき, $L^2(V; \mu)$ 上の二次形式

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} w(x,y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)), \quad u, v \in C_0(V)$$

は可閉であり, 二次形式 $(\mathcal{E}, C_0(V))$ の閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(V; \mu)$ 上の正則ディリクレ形式となる. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成するマルコフ連鎖を, 重み付きグラフ (V, w, μ) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶことにする. このマルコフ連鎖は, 次で定義される行列 $(q_{xy})_{x,y \in V}$ を Q-matrix にもつ V 上の最小なマルコフ連鎖となる:

$$q_{xy} = \begin{cases} \dfrac{w(x,y)}{\mu(x)} & x \neq y \\[2ex] -\dfrac{\sum_{z \in V, z \neq x} w(x,z)}{\mu(x)} & x = y. \end{cases}$$

---

*本講演は同題目の論文 (Stochastic Process. Appl. に掲載予定) に基づく.

†Faculty of Mathematics and Information, FSU Jena

‡岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部環境数理学科

定義 1. (V,w,μ) を重み付きグラフとする. σ を $V\times V$ から有界閉区間 $[0,1]$ への関数とし, 任意の $x,y\in V$ について

$$\sigma(x,y)=\sigma(y,x),\quad \sigma(x,y)>0 \iff x\sim y$$

を満たすものとする.

(1) 任意の点 $x\in V$ に対して不等式

$$\sum_{y\in V}\sigma(x,y)^2 w(x,y)\le \mu(x)$$

が成立するとき, 関数 σ は重み付きグラフ (V,w,μ) に**適合している**という.

(2) σ を重み付きグラフ (V,w,μ) に適合した関数とする. $V\times V$ 上の関数

$$d_\sigma(x,y):=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma(x_{k-1},x_k)\mid (x_0,x_1,\dots,x_n)\text{ は }x\text{ と }y\text{ を結ぶ道}\right\},\quad x,y\in V$$

を, 重み付きグラフ (V,w,μ) に**適合した道の距離**という.

注意 1. 重み付きグラフ (V,w,μ) に適合した道の距離は V 上の距離になる. この距離は強局所型ディリクレ形式の内在的距離の類似であり, Frank-Lenz-Wingert (2010) の意味での, 正則ディリクレ形式に対する内在的距離にもなる.

定義 2. 重み付きグラフ (V,w,μ) に対応するマルコフ連鎖を $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\ge 0},\{P_x\}_{x\in V})$ とかき, このマルコフ連鎖は保存的であると仮定する. d を V 上の距離とし, 点 $x\in V$ を 1 つ固定する. $[0,\infty)$ 上の狭義単調増加な正値関数 $R(t)$ は, 等式

$$P_x(d(x,X_t)\le R(t)\text{ for all sufficiently large }t)=1$$

が成立するとき, マルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d に関する **upper rate function** であるという.

V 上の距離 d に関する, 中心 $x_0\in V$, 半径 $r>0$ の開球を $B_d(x_0,r)$ とおく.

定理 1. (V,w,μ) を重み付きグラフとし, d_σ をこのグラフに適合した距離とする. 条件

(i) $\displaystyle\inf_{x\in V}\mu(x)>0$;

(ii) $\displaystyle\int_{\cdot}^{\infty}\frac{r}{\log\mu(B_{d_\sigma}(x_0,r))}\,\mathrm{d}r=\infty$

の下で次が成立する.

(1) 重み付きグラフ (V,w,μ) に対応するマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ は保存的である.

(2) ある定数 $c>0$ と $\hat{R}\ge 1$ が存在して, 関数

$$\psi(R):=c\int_{\hat{R}}^{R}\frac{r}{\log\mu(B_{d_\sigma}(x_0,r))+\log\log r}\,\mathrm{d}r$$

の逆関数 $\psi^{-1}(t)$ はマルコフ連鎖 $\mathbf{M}$ の距離 d_σ に関する upper rate function となる.

定理 1 (2) は, リーマン多様体上のブラウン運動の escape rate に関する Hsu-Qin (2010) の結果をマルコフ連鎖へ拡張するとともに, Huang (2013) の結果を改良している. 特に定理 1 (2) は精密であることも分かる. 一方で, 定理 1 (1) は新しい結果ではない. 実際, Folz (2013) は条件 (i) を課さずにマルコフ連鎖の保存性を示している.