Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients

小川 重義　（立命館大学）
植村 英明　（愛知教育大学）

(i) Noncausal Itô 過程の確率 Fourier 係数.　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を 1次元 Wiener 空間とする。非因果的過程 $a(t,\omega), b(t,\omega)$ に対して $dX_t = b(t,\omega)dt + a(t,\omega)dW_t$ で定義される確率過程 X_t を noncausal Itô 過程と呼ぶ。ここで dW_t は非因果的確率積分を意味する。$L^2([0,1], dt)$ の完全正規直交基底 $\{\varphi_n(t)\}$ に対して，

$$\mathcal{F}_n(dX) = \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} dX_t \left(= \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} a(t,\omega) dW_t + \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} b(t,\omega) dt \right) \tag{1}$$

を X_t の $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 Fourier 係数と呼ぶ ($\overline{z}$ は z の複素共役)。ただし上の dX_t による積分は Riemann 和の極限として定義する。

本講演では三角関数系 $\{e_k(t) := \exp\{2\pi\sqrt{-1}kt\},\ k \in \mathbb{Z}\}$ に対する確率 Fourier 係数 $\mathcal{F}_n(dX)$ による $a(t,\omega), b(t,\omega)$ の再現可能性についての考察結果を報告する。(1) の正確な定義のために次の準備を行う。

(ii) Skorokhod 積分.　$f(t,\omega) \in L^2([0,1] \times \Omega, dt \times dP)$ は次の Wiener-Itô 展開を持つ。

$$f(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t)).$$

ここで $I_n(k_n^f(t))$ は $k_n^f(t)$ を被積分関数とする n 重 Wiener 積分を表す：

$$\begin{cases} k_n^f(t) = k_n^f(t; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ I_n(k_n^f(t)) = \displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n^f(t; t_1, t_2, \ldots, t_n) dW_{t_1} \cdots dW_{t_n}. \end{cases}$$

ただし $k_n^f(t)$ は $L^2([0,1]^n, dt_1 \cdots dt_n)$ の元で $t_1, t_2, \ldots, t_n$ に関して対称なものとする。

$$E[|f(t,\omega)|^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! |k^f(t;\cdot)|_n^2 \quad (|k^f(t,\cdot)|_n \text{は}\ k^f(t;\cdot)\ \text{の}\ L^2([0,1]^n, dt_1 \cdots dt_n)\ \text{ノルム})$$

に注意する。ここで $f(t,\omega)$ の Skorokhod 積分 $\int_0^1 f(t,\omega) dW_t$ を次で定義する。

$$\int_0^1 f(t,\omega) dW_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(k_n^f(\cdot)^{\sim}).$$

ただし $k_n^f(\cdot)^{\sim}$ は $k_n^f(\cdot)$ の対称化を表す。また $g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^g(t_1 \ldots, t_n))$ に対して，$D_t g(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n-1}(n k_n^g(t_1 \ldots, t_{n-1}, t))$ と定義する。

$$\mathcal{L}^{2,1} = \left\{ f(t,\omega) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! |k_n^f|_{n+1}^2 < \infty \right\}, \quad \mathcal{L}^{2,2} = \left\{ f(t,\omega) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)! |k_n^f|_{n+1}^2 < \infty \right\}$$

($|k_n^f|_{n+1}^2 = \int_0^1 |k^f(t;\cdot)|_n^2 dt$) とおくと，$f(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,1}$ の Skorokhod 積分 $\int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ は $L^2(\Omega, dP)$ の元として定まる。

(iii) Bohr 畳み込みによる再現定理.

定理 1. $a(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,2}$, $b(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,1}$ とする。このとき

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k+\ell=n, |\ell|\le N} \left(\int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_k(t)}dW_t + \int_0^1 b(t,\omega)\overline{e_k(t)}dt \right) \int_0^1 \overline{e_\ell(t)}dW_t$$
$$= \int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_n(t)}dt \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, dP).$$

が成り立つ。

これは次の命題から導かれる。($b(t,\omega)$ についての同様の命題は講演時に述べる。)

命題 1. $a(t,\omega) \in \mathcal{L}^{2,2}$, $e(t) \in L^2([0,1], dt)$ に対して次式が *a.s.* に成立する。

$$\int_0^1 a(t,\omega)dW_t \int_0^1 e(t)dW_t$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 a(s,\omega)dW_s \right) e(t)dW_t + \int_0^1 \left(\int_0^1 D_t a(s,\omega)dW_s \right) e(t)dt + \int_0^1 a(t,\omega)e(t)dt.$$

(iv) $\boldsymbol{a(t,\omega), b(t,\omega) \in L^p(dP)}$ の場合. $p \in (1,2)$ のとき，X_t は Skorokhod 積分では定義できない。そこでこの場合には確率積分項 $\int\ dW_t$ は Malliavin 解析における divergence としてとらえる。さらに $p \in (1,\infty)$ とする。Hilbert 空間 K に対して Watanabe 空間 $\mathbb{D}_p^\alpha(K)$ を考える：

$$\mathbb{D}_p^\alpha(K) = (I-L)^{-\alpha/2} L^p(\Omega \to K, dP) \quad (p \in (1,\infty), \alpha \in \mathbf{R})$$

ここで L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素を表す。するとこの状況下においても次の定理が成り立つ。

定理 2. $p \in (1,\infty)$,$\alpha \in \mathbf{R}$ とし，$a(t,\omega) \in \mathbb{D}_p^{\alpha+2}(L^2([0,1] \to \mathbf{C}))$, $b(t,\omega) \in \mathbb{D}_p^{\alpha+1}(L^2([0,1] \to \mathbf{C}))$ とする。このとき

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k+\ell=n, |\ell|\le N} \left(\int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_k(t)}dW_t + \int_0^1 b(t,\omega)\overline{e_k(t)}dt \right) \int_0^1 \overline{e_\ell(t)}dW_t$$
$$= \int_0^1 a(t,\omega)\overline{e_n(t)}dt \quad \text{in} \quad \mathbb{D}_p^\alpha(\mathbf{C}).$$

が成り立つ。

参考文献

[1] S. Ogawa, *On a stochastic Fourier transformation* Stochastics, 85-2 (2013), 286–294.

[2] S. Ogawa & H. Uemura, *On a stochastic Fourier coefficient — case of noncausal functions —*, *to appear in* Journal of Theoretical Probability.

[3] S. Ogawa & H. Uemura, *Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients*, preprint.