# 複素力学系および
# ランダムな複素力学系の入門 (集中講義)

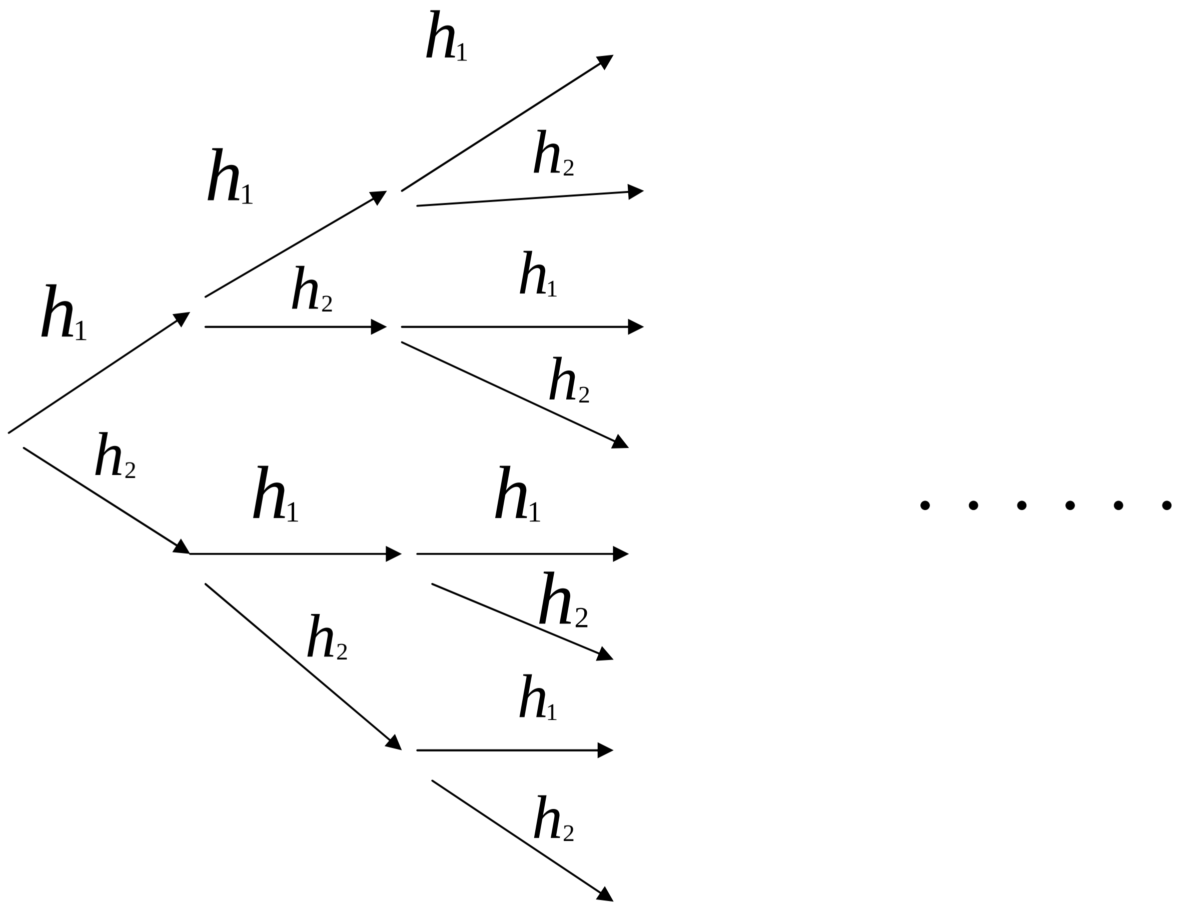
**角　大輝（すみ　ひろき）**
**大阪大学理学部数学教室**
**E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp**
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

2011年5月30日– 6月1日

# 集中講義予定

1. 概観、 複素解析の復習、道具立て
2. リーマン球面上の正則写像半群による複素力学系、ファトウ集合、ジュリア集合の基本的性質
3. ランダムな複素力学系 (定義と結果の紹介)
4. ランダムな複素力学系の詳細といくつかの定理の証明
5. おまけ

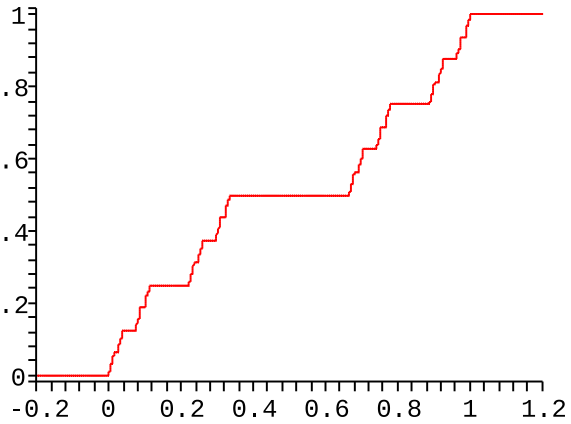
**主な参考文献は[1]–[8], [58]. 単位取得のためには、4問以上の演習問題の解答と、講義の感想をレポート用紙にまとめ、氏名を記入のうえ、所定の場所に所定の締め切り日までに提出。問題を多く解けば成績を良くします。**


$h_1$
$h_1$
$h_2$
$h_1$
$h_2$
$h_1$
$h_2$
$h_2$
$h_1$
$h_1$
$h_2$
$h_2$
$h_1$
$h_2$
. . . . . .

# 1　概観, 準備

まず実直線$\mathbb{R}$上のランダムな力学系を考えてみる。
$h_1(x) = 3x, h_2(x) = 3(x-1)+1$とおき、初期値$x \in \mathbb{R}$をとったあと、毎回、確率$1/2$ずつで写像$h_1$または$h_2$を選択して、点を動かすことを考える。初期値$x$に対して、$+\infty$に飛んでいく確率を$D_{+\infty}(x)$とおくと、・・・

**図１　関数 $D_{+\infty}$ ($+\infty$ に飛んでいく確率の関数) のグラフ：**



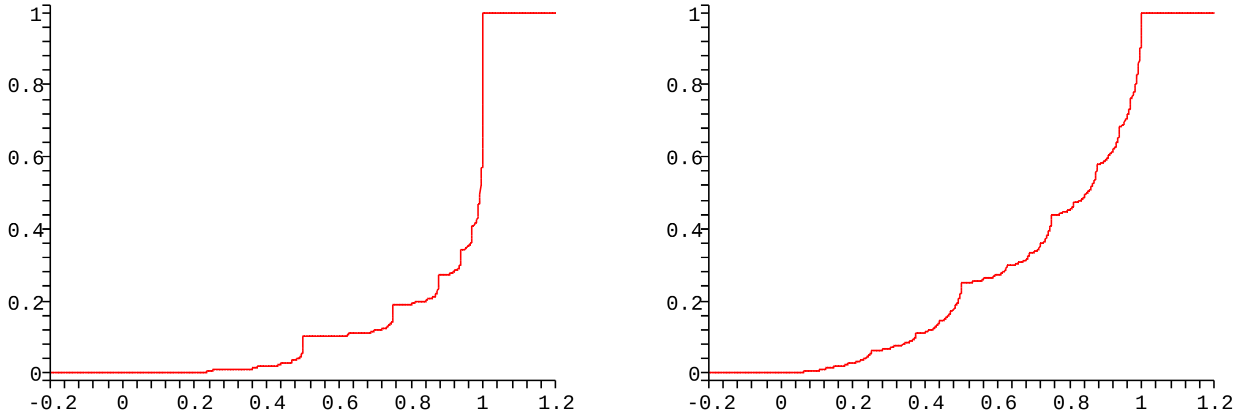

**$D_{+\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続で、カントールの三進集合という（細い）フラクタル集合上でのみ変化する。また、単調性を持つ。$D_{+\infty}|_{[0,1]}$ は「悪魔の階段」と呼ばれる ([72])。特異関数の代表例。**

同じことを、今度は、$h_1(x) = 2x,\ h_2(x) = 2(x-1)+1$ とおいて、$0 < p < 1$ とし、初期値 $x \in \mathbb{R}$ をとったあと、毎回、

$$\begin{cases} h_1 \text{ を確率 } p \text{ で、} \\ h_2 \text{ を確率 } 1-p \text{ で} \end{cases}$$

で選択し、点を動かすことを考える。$+\infty$ に飛んでいく確率を $D_{+\infty,p}(x)$ とおくと、・・・

図2　関数 $D_{+\infty,p}$ ($+\infty$に飛んでいく確率の関数) のグラフ：左から p=0.1, p=0.25



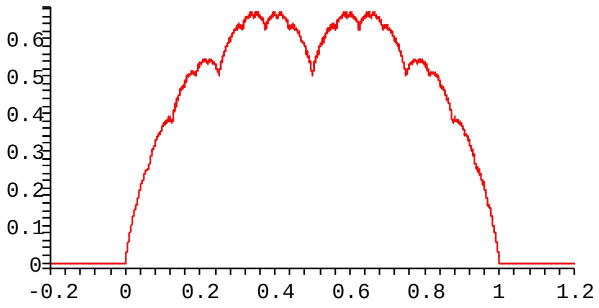

$p \neq 1/2$のとき、$D_{+\infty,p}|_{[0,1]}$は(確率)パラメータ$p$に対する**ルベーグの特異関数**と呼ばれる([72])。$[0,1]$で狭義単調連続だが、ルベーグ測度に関してほとんど全ての点で微分$0$という特異性を持つ。

$x \in \mathbb{R}$ を固定すると、$p \mapsto D_{+\infty,p}(x)$ は $(0,1)$ で**実解析的**であることが知られている([41])。

$$S(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_{+\infty,p}}{\partial p}\Big|_{p=1/2}(x)$$

のグラフは・・・

図3　関数 $S(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_{+\infty,p}}{\partial p}\Big|_{p=1/2}(x)$ のグラフ：




$S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続で、$[0,1]$ の各点で微分不可能。
$[0,1]$ 上の関数 $S|_{[0,1]}$ は「高木関数」と呼ばれる ([72])。

上記のことの複素平面上版を考え、ランダムな複素力学系と正則写像の半群の力学系の両者の分野を交錯させた基礎理論を展開する。

ランダムな複素力学系では多くの場合に、たとえ各写像の反復がカオス的部分を持っていても、複数の写像の協調・協力により平均化したシステムのカオスが消滅し（協調原理）、ある条件下では極限状態において

「複素平面上の特異関数」

が出現することをみる。

複素平面$\mathbb{C}$において、$h_1(z)$を$z \mapsto z^2 - 1$の2回合成、$h_2(z)$を$z \mapsto \frac{z^2}{4}$の2回合成、とおき、$0 < p < 1$とするとき、初期値$z \in \mathbb{C}$を取った後、毎回、

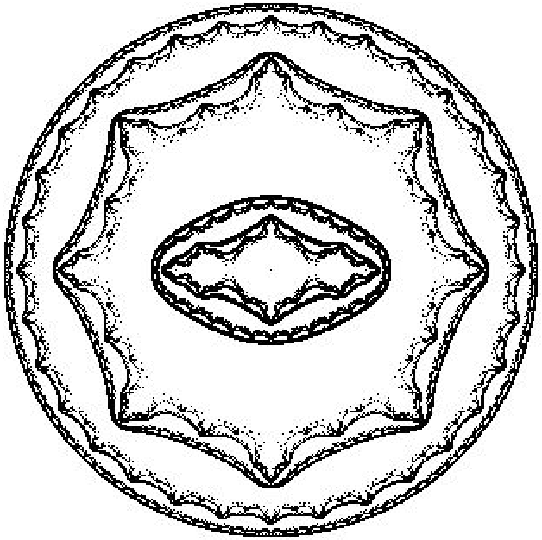
$$\begin{cases} h_1 \text{ を確率 } p \text{ で、} \\ h_2 \text{ を確率 } 1-p \text{ で} \end{cases}$$

で選択し、点を動かすことを考える。絶対値が$\infty$に飛んでいく確率を$D_{\infty,p}(z)$とおく(注：これは悪魔の階段の複素平面上版）と、$\mathbb{C}$上の関数$D_{\infty,p}$の様子は、

・・・

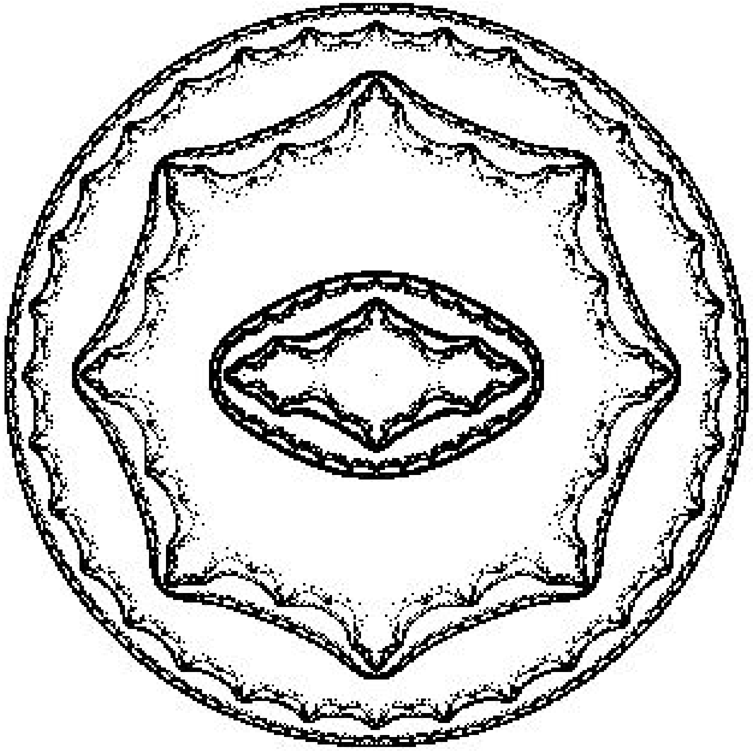
まず、$h_1, h_2$ で生成された写像の合成を積とする半群を $G$ とし、$G$ が同程度連続でない複素数初期値の集合を $J(G)$ とかいて「$G$ のジュリア集合」と呼ぶと、

図4　$J(G)$ ($G$ のジュリア集合) の絵：

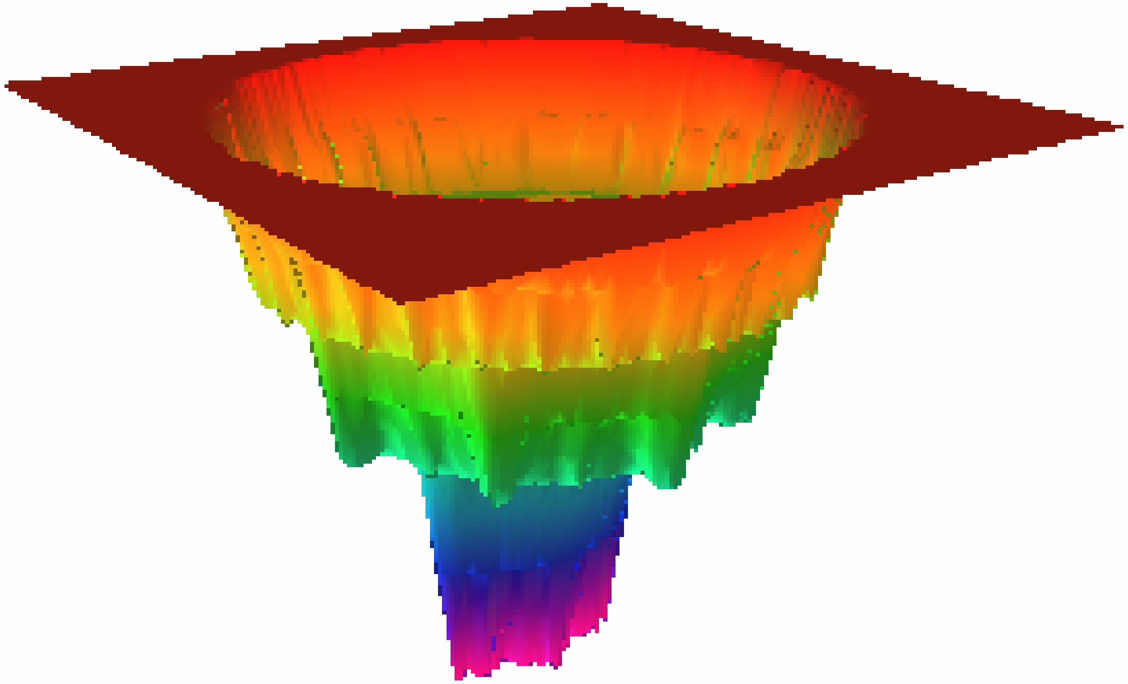


$D_{\infty,p}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続で、$J(G)$(黒の部分) の上のみで変化し、内側から外側にかけて単調に増加する。

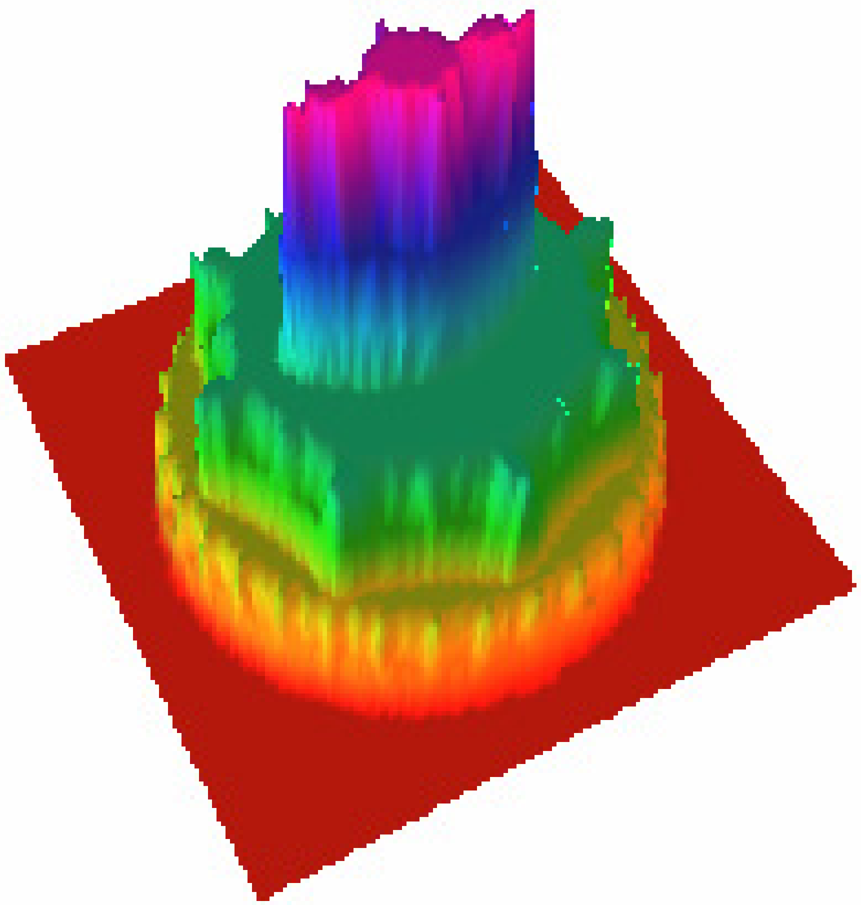
$g_1(z) := z^2 - 1,\ g_2(z) := \frac{z^2}{4},\ h_1 := g_1^2,\ h_2 := g_2^2$. $G := \langle h_1, h_2 \rangle$. $G \in \mathcal{G}_{dis}$.
The figure of $J(G)$. $\sharp \mathrm{Con}(J(G)) > \aleph_0$.



$g_1(z) := z^2 - 1,\ g_2(z) := \frac{z^2}{4},\ h_1 := g_1^2,\ h_2 := g_2^2,\ \tau := \frac{1}{2}\delta_{h_1} + \frac{1}{2}\delta_{h_2}$.
The graph of $z \mapsto T_{\tau,\infty}(z)$.
**(Devil's Coliseum (Complex analogue of devil's staircase).)**



The graph of $z \mapsto 1 - T_{\tau,\infty}(z)$.

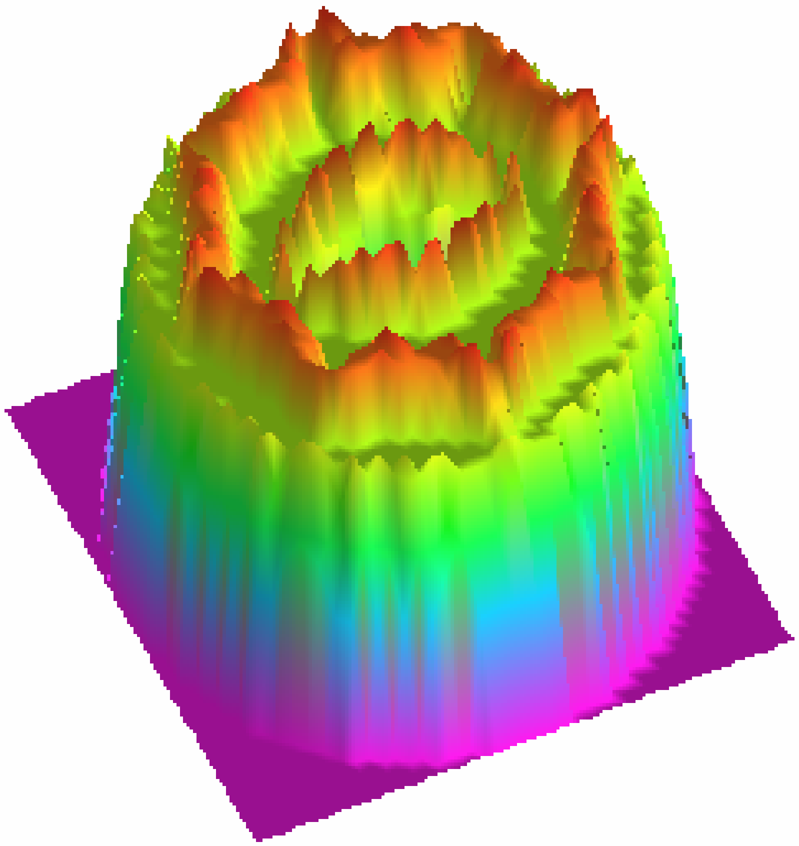


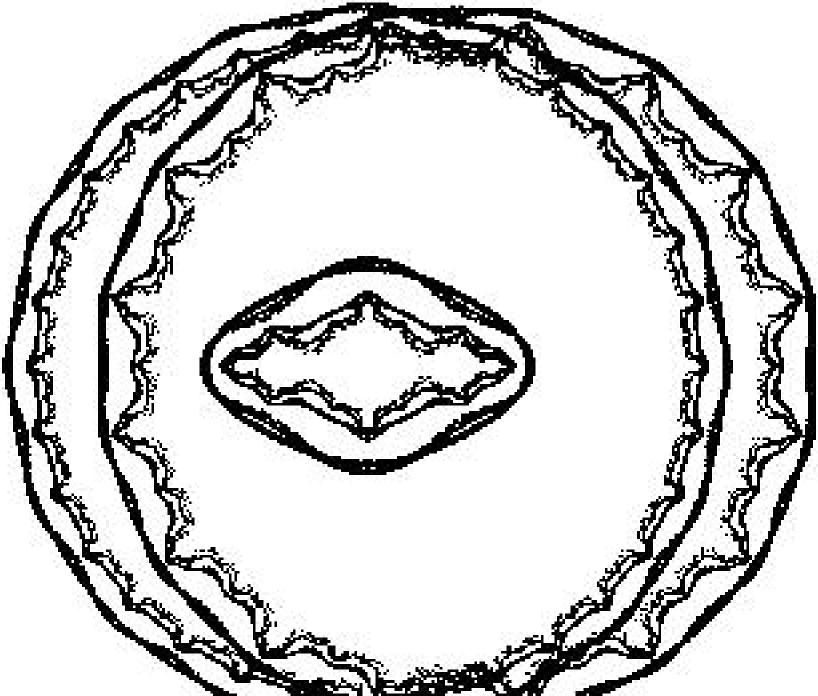
$z \in \mathbb{C}$を固定すると$p \mapsto D_{\infty,p}(z)$が$(0,1)$上で**実解析的**であることが示される。

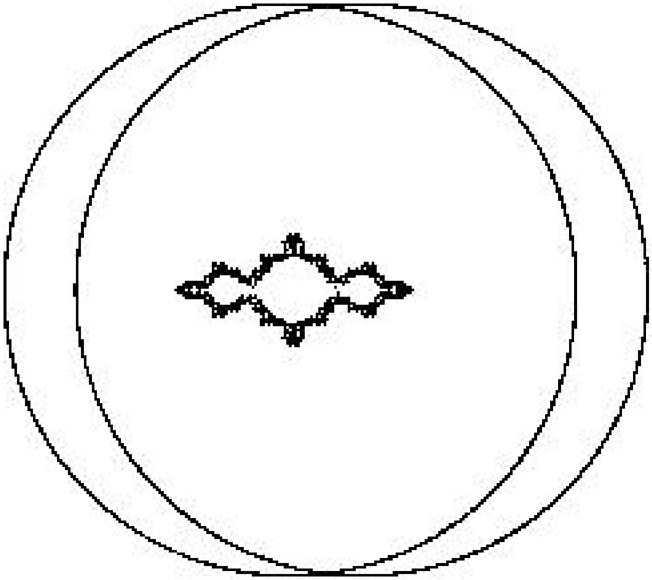
$$S(z) = \frac{\partial D_{\infty,p}}{\partial p}\Big|_{p=1/2}(z)$$

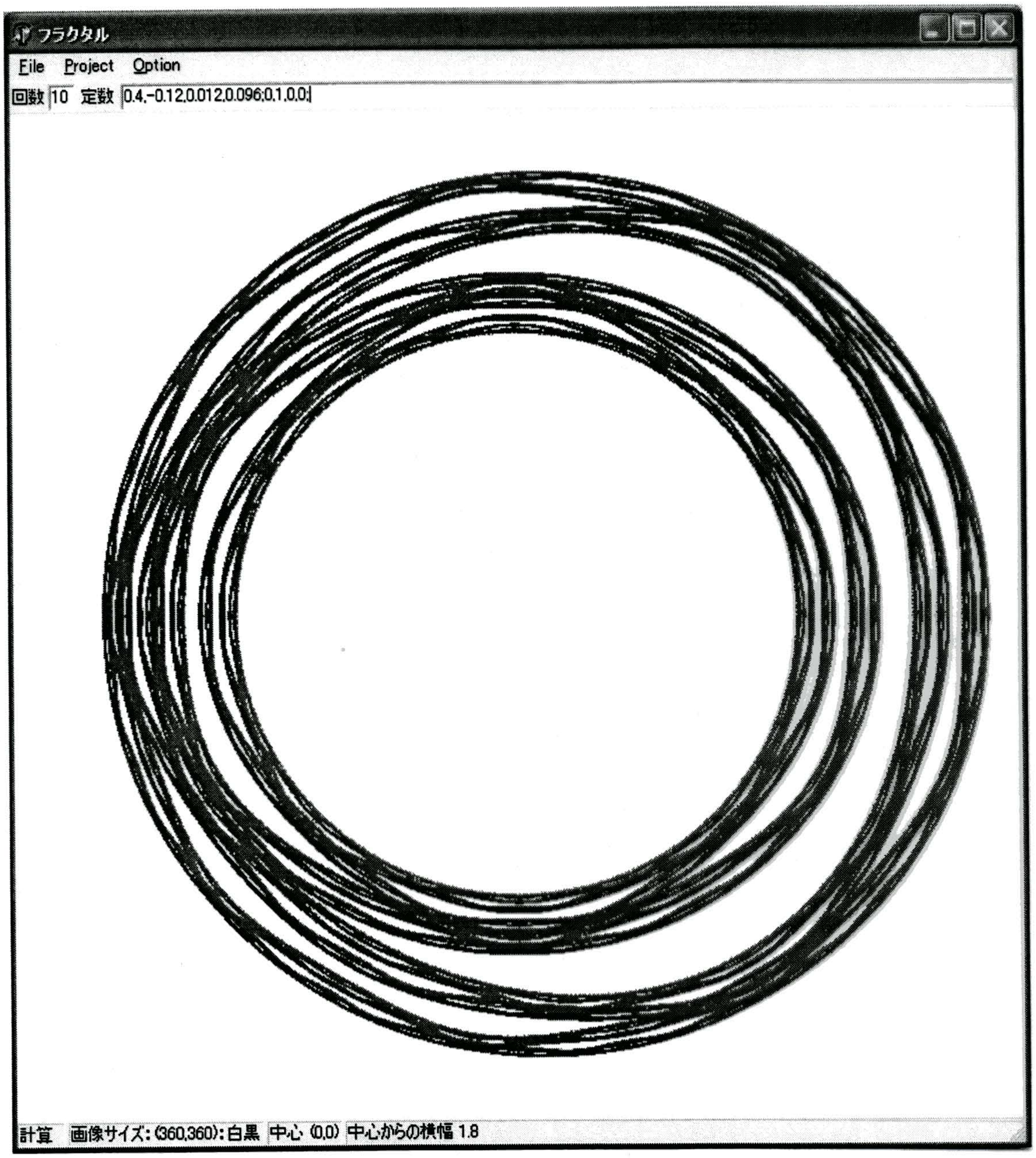
(つまり**高木関数の複素平面上版**) を考えると、$S(z)$は**$\mathbb{C}$上で連続**で、**$J(G)$の中のみで変化**する。

$g_1(z) := z^2 - 1,\ g_2(z) := \frac{z^2}{4},\ h_1 := g_1^2,\ h_2 := g_2^2.$
The graph of $z \mapsto \frac{\partial T}{\partial p}(h_1, h_2, \frac{1}{2}, z)$.
**(A complex analogue of the Takagi function. )**

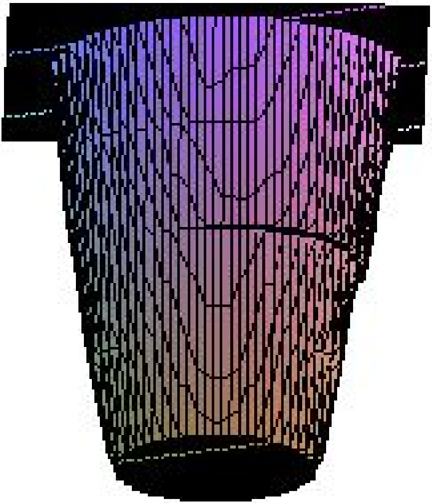


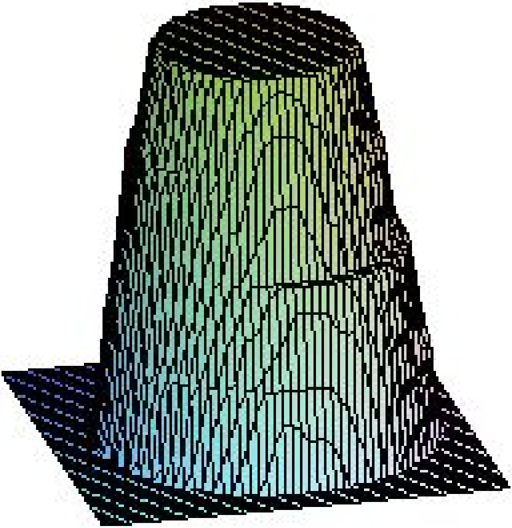


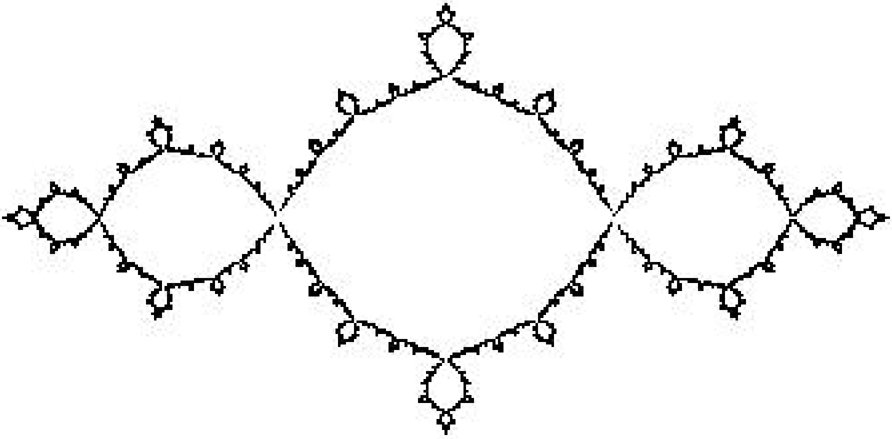


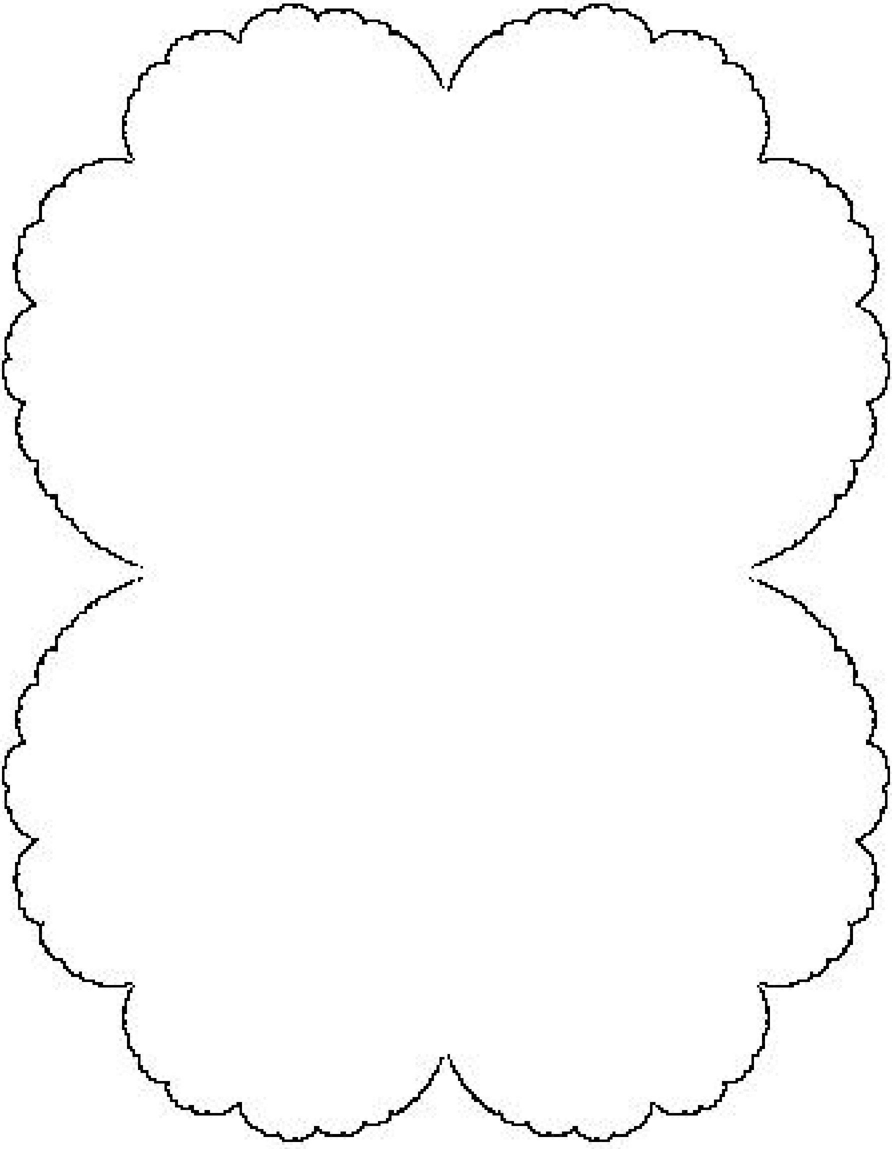


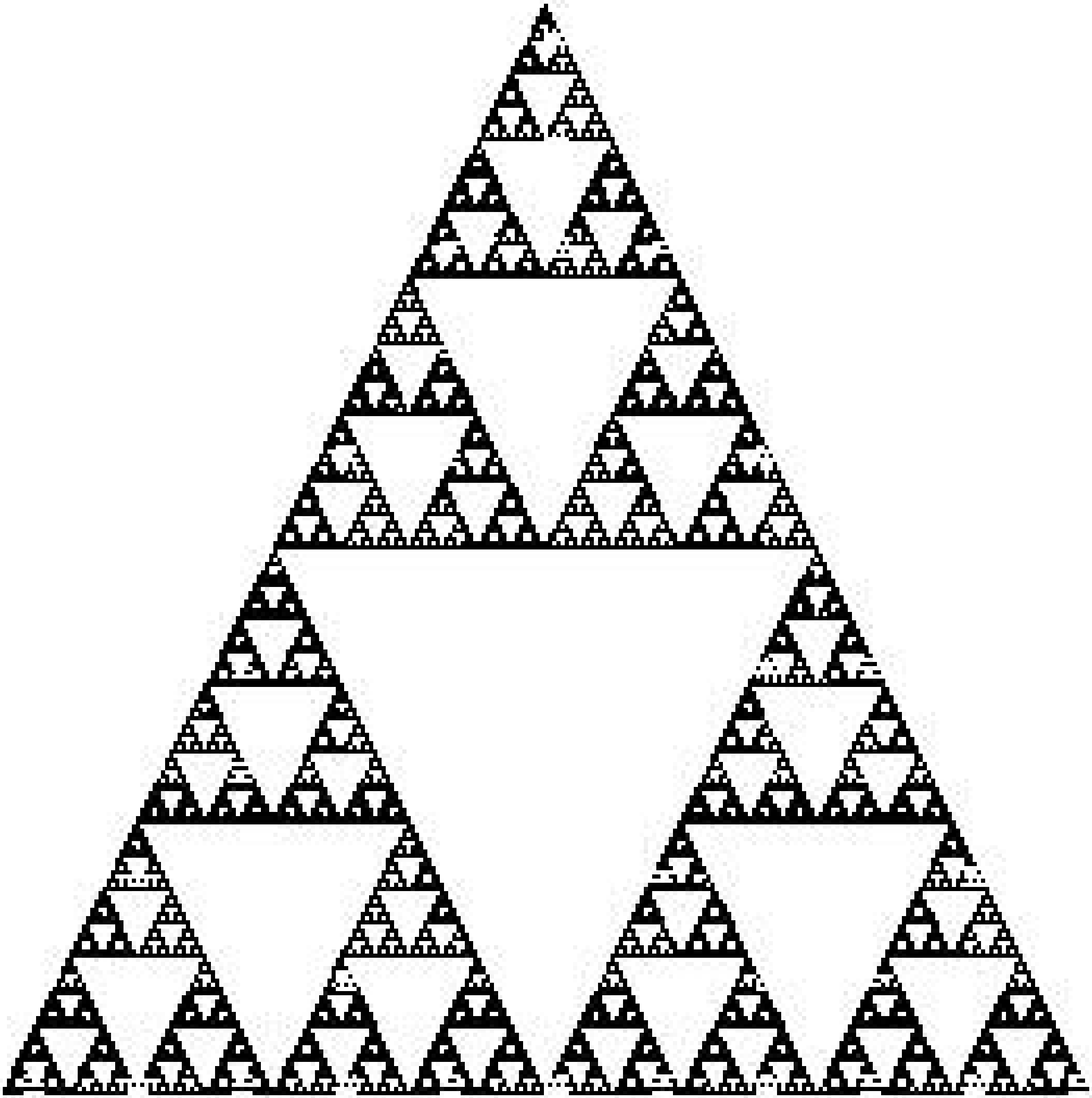

This is a picture of the Julia set of
$G_{a,b}=\langle g_{1}, g_{2}\rangle $,
where $g_{1}(z)=a(z-b)^{3}+b, g_{2}(z)=z^{2}.$
When $b=0.1$, there exists an $a$ with $0.2<a<1$ such that
$G_{a,b}$ is hyperbolic, satisfies the open set condition,
$P(G_{a,b})\setminus \{ \infty \} $ is bounded in the complex plane,
and $g_{1}^{-1}(J(G_{a,b}))\cap g_{2}^{-1}(J(G_{a,b}))\neq \emptyset .$
(Hence $J(G_{a,b})$ is connected. ) The parameter of the above is close to the above $a.$











# 参考文献

[1] 「複素解析」L. アールフォルス著、笠原乾吉訳、現代数学社　**複素解析学の最も有名なテキストの一つ。**

[2] O. Forster, Lectures on Riemann Surfaces, GTM 81, Springer.　**リーマン面の標準的テキストの一つ。**

[3] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, 3rd ed., Annals of Math. Studies No. 160, 2006.　**一つの有理関数の反復合成を扱う通常の一変数複素力学系の最も有名な入門書の一つ。やや幾何的。幾何の部分を仮定すれば、非常に透明感がある。**

[4] A. Beardon, Iteration of rational functions, GTM 132, Springer, 1991.　[3] **とならぶ一変数複素力学系の有名な入門書で、やや解析的、初等的に書かれている。がその分、**[3] **と比べて、議論がやや煩雑に思われるところもある。有理関数の非反発的周期サイクルの個数評価理論（京大理学部宍倉光広氏の修士論文の内容）が掲載されている。**

[5] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc. London Math. Soc. (3)**73**(1996), 358–384. **（世界で初めて有理半群を扱った論文の一つ。）**

[6] R. Stankewitz, Density of repelling fixed points in the Julia set of a rational or entire semigroup II, to appear in special volume of Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A: Proceedings of the conference Dynamical Systems II, Denton 2009, http://rstankewitz.iweb.bsu.edu/# Publications. [5] **の内容を、より分かりやすい道具立てで示した。有理半群を勉強する際は、必ず読むとよい。本講義はこの論文の内容をかなり参照した。**

[7] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc., (2011), 102 (1), 50–112. http://arxiv.org/abs/0812.4483 **に論文最終版あり**.　**本講義のランダム複素力学系の部分の詳細はこの論文に書かれている。**

[8] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, preprint 2010, http://arxiv.org/abs/1008.3995. [7] **に続いて、さらに詳しく、ほとんど全てのランダム多項式力学系ではカオスが消滅してしかもシステムの摂動に関して安定であること、などを示した。**

[9] **「複素力学系序説」、上田、谷口、諸澤著、培風館**　1995**年**. (**序説とあるのだが、かなり難しい。辞書のように扱われることがある。**)

[10] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge studies in advanced mathematics 66, 2000. (**「複素力学系序説」の英語版だが、多変数複素力学系の章を大幅に加筆。そ**

の章は多変数複素力学系の入門書として使える。)
[11] P. Allaart and K. Kawamura, *Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 (2006), no. 2, 269–295.
[12] A. Ambroladze, *Ergodic properties of random iterations of analytic functions*, Ergod. Theory Dynam. Systems, **19** (1999), no. 6, 1379–1388. **単位円板上での正則写像のランダム力学系を扱う。**
[13] L. Arnord, *Random Dynamical Systems*, 1998, Springer. **実多様体上のランダム力学系理論の一般論の(標準的?)テキストの一つ。しかしランダム複素力学系は扱われていない。**
[14] R. Brück, *Connectedness and stability of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$*, J. London Math. Soc. **61** (2000), 462-470.
[15] R. Brück, *Geometric properties of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$*, Pacific J. Math., **198** (2001), no. 2, 347–372.
[16] R. Brück, M. Büger and S. Reitz, *Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: Connectedness of Julia sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **19**, (1999), No.5, 1221–1231.
[17] M. Büger, *Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 1289–1297.
[18] M. Büger, *On the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$*, Math. Ann. 310 (1998), no. 4, 661–683.
[19] M. Comerford, *Non-Autonomous Julia Sets with Invariant Sequences of Measurable Line Fields*, preprint 2011, http://arxiv.org/abs/1105.3225. **ある2次多項式列$\gamma$においては、そのジュリア集合上で力学系が変形できる、と主張している。ちなみに、そのようなことは通常の多項式力学系ではありえないという大予想がある。**
[20] L. DeMarco and S. L. Hruska, *Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2008) 28, 1749-1779.
[21] L. DeMarco and S. L. Hruska, Coorection to Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets, preprint, http:www.math.uic.edu/∼demarco/correction.pdf.
[22] J. E. Fornaess and N. Sibony, *Random iterations of rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **11**(1991), 687–708. **ランダム複素力学系を世界で初めて本格的に扱った論文。**
[23] Z. Gong, W. Qiu and Y. Li, *Connectedness of Julia sets for a quadratic random dynamical system*, Ergodic

Theory Dynam. Systems, (2003), **23**, 1807-1815.
[24] Z. Gong and F. Ren, *A random dynamical system formed by infinitely many functions,* Journal of Fudan University, **35**, 1996, 387–392. **（世界で初めて有理半群の力学系を扱った論文の一つ。）**
[25] T. Harada, *The dynamics of nearly abelian polynomial semigroups at infinity*, Proc. Japan Academy, Vol. 73, Ser. A, No. 3, (1997).
[26] M. Hata and M. Yamaguti, *Takagi function and its generalization*, Japan J. Appl. Math., **1**, pp 183-199 (1984).
[27] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc. London Math. Soc. (3)**73**(1996), 358–384.
[28] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *Julia Sets of Rational Semigroups* , Math. Z. **222**, 1996, no.2, 161–169.
[29] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *Some properties of semigroups of rational functions*, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), 53-58, de Gruyter, Berlin, 1996.
[30] **「ルベーグ積分入門」伊藤清三著、裳華房、**1963. **かなり古いが、測度論のしっかりとした入門書で評判の高い本。**
[31] **「タイヒミュラー空間論」新版　今吉・谷口著　日本評論社**, 2004**年. リーマン面の複素構造（複素平面の領域の張り合わせ方）の空間の一般論を扱う。この理論は**2**次元、**3**次元の幾何学の主要な部分を占める。この理論を複素力学系に応用しさらに発展させたのが**Sullivan**で、**[50] ([38]**も参照）で**No Wandering Domain Theorem **が証明された。**
[32] M. Jonsson, *Dynamics of polynomial skew products on* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. **314** (1999), 403-447.
[33] M. Jonsson, *Ergodic properties of fibered rational maps* , Ark. Mat., 38 (2000), pp 281–317. **有理写像歪積のポテンシャル論からのアプローチ。**
[34] K. Katagata, *On a certain kind of polynomials of degree 4 with disconnected Julia sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 20 (2008), no. 4, 975–987. **一つの多項式力学系とある多項式半群の関係を扱う。**
[35] M. Loéve, *Probability Theorem I*, fourth ed., GTM 45, Springer-Verlag, 1977. **無限個の確率測度空間の直積の構成などが最初に書かれている。**
[36] K. Matsumoto and I. Tsuda, *Noise-Induced Order*, J. Stat. Phys., Vol. 31, No. 1, 1983. **物理サイド（数値実験）で、実一次元ランダム力学系において、あるカオス的写像に一様なノイズを加えるとカオスが消えて秩序的になりうる、と指摘した論文。本講義の「協調原理」はこの**noise-induced order **に少し似ている。 なお、最近、物理サイドで、力学系をランダムにすることによって初めて出る現象「雑音誘起現象」が非常に多く観察され、研究が盛んである（がまだ数学サイドが追いついていない）。**

[37] C. T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Mathematics Studies Number 135, Princeton University Press, 1994. **一変数複素力学系理論で、**Milnor**の教科書のあとに 続くテキスト。「双曲的な有理関数らは有理関数の空間で稠密」という大予想を意識している。**
[38] C. T. McMullen and D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. III. The Teichmuller space of a holomorphic dynamical system.* Adv. Math. 135 (1998), no. 2, 351–395. Sullivan**の**No Wandering Domain Theorem **を「複素力学系の変形理論」を展開することによって証明している。**Sullivan**の**[50]**よりも読みやすい（がそれでもかなり難しい**)**。タイヒミュラー空間論を複素力学系に合わせて一般化している。**
[39] **「実解析と測度論の基礎」盛田健彦著、培風館、**2004**年**. **測度論の最近のテキストで、しっかりと書かれた非常に評判の良い本。 しかし、手に入りづらいかもしれない。**
[40] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., Mc-Graw Hill International Editions, 1987. **測度論の世界的な標準的教科書。英語だがとても読みやすい。予備知識は微積、線形代数、集合と位相のみ。**
[41] T. Sekiguchi and Y. Shiota, *A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function*, Japan J. Appl. Math. **8**, pp203-219, 1991.
[42] O. Sester, *Combinatorial configurations of fibered polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **21** (2001), 915-955.
[43] R. Stankewitz, *Completely invariant Julia sets of polynomial semigroups,* Proc. Amer. Math. Soc., **127**, (1999), No. 10, 2889–2898.
[44] R. Stankewitz, *Completely invariant sets of normality for rational semigroups*, Complex Variables Theory Appl., Vol 40.(2000), 199–210.
[45] R. Stankewitz, *Uniformly perfect sets, rational semigroups, Kleinian groups and IFS's,* Proc. Amer. Math. Soc. **128**, (2000), No. 9, 2569–2575.
[46] R. Stankewitz, Density of repelling fixed points in the Julia set of a rational or entire semigroup II, to appear in special volume of Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A: Proceedings of the conference Dynamical Systems II, Denton 2009, http://www.bsu.edu/web/rstankewitz/♯Publications.
[47] Julia fractal drawing program, by R. Stankewitz, W. Conatser, S. Qiu, and Ben Dean. http://rstankewitz.iweb.bsu.edu/JuliaHelp2.0/Julia.html. **有理半群のジュリア集合やアトラクタを描くためのコンピュータプログラム。**
[48] R. Stankewitz, T. Sugawa and H. Sumi, *Some counterexamples in dynamics of rational semigroups,*

Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Vol. 29, 2004, 357–366.
[49] R. Stankewitz and H. Sumi, *Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., http://arxiv.org/abs/0708.3187.
[50] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. Math. **122**, 401-418, 1985. **この論文(とA. DouadyやJ. Hubbardらの一連の仕事)によって、1910年代に始まってからその後しばらく忘れ去られたかのようになっていた複素力学系理論が、にわかに脚光を浴びるようになった。この論文の出現以来、爆発的な発展が続いている。**
[51] H. Sumi, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups,* Nonlinearity, **13**, (2000), 995–1019. **有限生成有理半群に付随する歪積写像の位相的エントロピー（複雑さ）や、エントロピーがその値をとる不変測度の一意性などを示した。**
[52] H. Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2001), **21**, 563–603. **有理半群のある良いクラスを調べるのに、生成系に付随する歪積を詳しく調べて様々な結果を得た。とくにその良いクラスで** $\gamma \mapsto J_\gamma$ **が連続的となることなどを示した。**
[53] H. Sumi, *A correction to the proof of a lemma in 'Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products'*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2001), **21**, 1275–1276.
[54] H. Sumi, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Mathematical Journal, Vol. 28, No. 2, 2005, pp390–422. **双曲的有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について、エルゴード理論（測度論的力学系）からのアプローチ。**
[55] H. Sumi, *Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2006), **26**, 893–922.
[56] H. Sumi, Erratum to: "Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups" [Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 3, 893–922]; Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 3, 1043–1045.
[57] H. Sumi, *Interaction cohomology of forward and backward self-similar systems*, Adv. Math., 222 (2009) no.3, 729–781. **有限生成有理半群や、有限個の縮小写像でできた半群の力学系の不変集合上での動きと絡み具合をみるために、新しいコホモロジー論を導入した。それによって、ジュリア集合（不変集合）の連結成分の個数が分かったり、ファトウ集合 (不変集合の補集合）の連結成分の個数が分かったり、ファトウ集合 (不変集合の補集合) のホモロジー群が分かったりすることがある。**
[58] H. Sumi, **「有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数」**, **日本数学会雑誌「数学」第61巻第2号**

2009年4月春季号論説 p133-161. http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-j.html. **本講義の一部の概説がこの論説にあります。**

[59] H. Sumi, *Topics in dynamics of rational semigroups and fibered rational maps*, RIMS Kokyuroku 1220, p78-122, 2001. (Proceedings paper.)

[60] H. Sumi, *The space of postcritically bounded 2-generator polynomial semigroups with hyperbolicity*, RIMS Kokyuroku 1494, 62–86, 2006. (Proceedings paper.)

[61] H. Sumi, *Random dynamics of polynomials and devil's-staircase-like functions in the complex plane*, Applied Mathematics and Computation 187 (2007) pp489-500. (Proceedings paper.)

[62] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc., (2011), 102 (1), 50–112. http://arxiv.org/abs/0812.4483 **に論文最終版あり**. **本講義のランダム複素力学系の内容はこの論文に含まれます。**

[63] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups I: connected components of the Julia sets*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A, Vol. 29, No. 3, 2011, 1205–1244. **多項式半群のあるクラスでは、通常の多項式力学系では決して現れないような特徴があることを示した。たとえば、任意の自然数** $n$ **に対して、**$2n$**-元生成多項式半群** $G$ **で、ジュリア集合の連結成分の個数がちょうど** $n$ **のものがあることや、3 元生成多項式半群** $G$ **で、そのジュリア集合の連結成分の個数が無限個だがちょうど可算となるものがあることなどを示した。**

[64] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups II: fiberwise dynamics and the Julia sets*, preprint 2008, http://arxiv.org/abs/1007.0613.

[65] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups III: classification of semi-hyperbolic semigroups and random Julia sets which are Jordan curves but not quasicircles*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010) **30** 1869–1902, see also http://arxiv.org/abs/0811.4536. **あるランダム多項式力学系の大きなクラスでは、ほとんど全てのランダムジュリア集合** $J_\gamma$ **が通常の多項式力学系では決して現れないような特徴を持つことを示した。**

[66] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, preprint 2010, http://arxiv.org/abs/1008.3995.

[67] H. Sumi, *Random complex dynamics and devil's coliseums*, preprint 2011, http://arxiv.org/abs/1104.3640.

[68] H. Sumi and M. Urbański, *The equilibrium states for semigroups of rational maps*, Monatsh. Math., 156 (2009), no. 4, 371–390.

[69] H. Sumi and M. Urbanski, *Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010), Vol. 30, No. 2, 601-633.

[70] H. Sumi and M. Urbański, *Measures and dimensions of Julia sets of semi-hyperbolic rational semigroups*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A, Vol 30, No. 1, 2011, 313–363. http://arxiv.org/abs/0811.1809.

[71] H. Sumi and M. Urbański, *Bowen Parameter and Hausdorff Dimension for Expanding Rational Semigroups*, http://arxiv.org/abs/0911.3727.

[72] **山口昌哉**, **畑政義**, **木上淳**, **「フラクタルの数理」**, **岩波講座応用数学**, **岩波書店**, 1993.

[73] W. Zhou and F. Ren, The Julia sets of the random iteration of rational functions, Chinese Sci. Bulletin, **37**(12), 1992, 969–971.