図5

数学へのいざない

フラクタル図形の世界と悪魔の階段のなかまたち

数学は自然科学全体と深く連動しています。つまり、自然のものを見ているのですが、では、素直に自然界の「形」を見てみましょう。すると、なめらかな図形ばかりではなく、「細部を拡大すると全体と似る（自己相似性といいます）」という面白い特徴を持つ、複雑な図形がたくさんあることに気づきます。例えば、樹木、カリフラワー、雲の境界、海岸線、山肌、雪の結晶、などです。このような「細部を拡大すると全体と似る複雑図形」を**フラクタル（図形）**といいます。「フラクタル」とは「砕けた」を意味する造語です。その研究は1970年代から盛んになりました。現在、それは数学を含む自然科学全体に広がる大きな概念です。ちょっとそのような図形を見てみましょう。図1は阪大構内にある植え込みです。これを拡大すると図2で、細部も全体と同じパターンが続いているのが分かります。図3は**カリフラワー**の全体図。これを拡大すると図4で、全体は、有限個のミニチュアの合併からなり、その各ミニチュアは、有限個のミニチュアミニチュアの合併からなり、……とこれが繰り返されていきます。

さて、カリフラワーに似た植物にブロッコリーがありますが、両者を掛け合わせることが出来ると知っていましたか？それは**ロマネスコ**と呼ばれている食用植物で、400年前にイタリアで誕生しました。そのロマネスコが図5、その拡大図が図6です。その綺麗な自己相似性には驚くばかりです。これらはいずれも、成長して分かれて、ということの繰り返しの果て（極限）に見えてくるものです。

上記のような、細部が全体と似る、全体が有限個のミニチュアの合併となる図形を数学的に作ることができます。そのような図形のなかには「**自己相似集合**」と呼ばれるものがあります。図7は**シルピンスキーガスケット**と呼ばれているもの。三角形のパターンが無限回繰り返されます。

その五角形版（Pentakun といいます）が図8。図9は雪の結晶または雪の小片のように見えませんか？これは**雪片集合**と呼ばれていて、全体は７つのミニチュアの合併からなります。この手法により、自然界の植物、樹木、森、山肌、などをコンピュータグラフィクスでそっくりに描くことがよく行われています。

フラクタル集合の大きさと複雑さをはかるものに「**フラクタル次元**」と呼ばれるものがあり、それは非整数になりえます。例えば図7のシルピンスキーガスケットのフラクタル次元は約1.58になります。このようなお話は、微分積分学の延長にある分野に関係しています。また、自己相似集合の島の個数や穴の開き方などを幾何学的に調べることも出来ます。

さて、ほかの種類のフラクタル図形を見てみましょう。２つの関数$f_1(x)$, $f_2(x)$ を用意して、初期値x_0 をとったあと、さいころを振ったときの出た目などで関数$f_1(x)$, $f_2(x)$ のどちらかを選択して点を動かすことを繰り返す、というようなことを考えることがあります（ランダム力学系といいます）。

このような話は、物事がある法則に従って時間とともに変化するときに、その未来予測をするために使われますので、ありとあらゆる自然科学、経済学などの数理モデルで扱われます。例えば、$f_1(x) = 3x, f_2(x) = 3x - 2$のとき、初期値$x_0$ をとって、さいころを振り、偶数の目ならばf_1 でx_0 を動かす、奇数の目ならばf_2 でx_0 を動かします。その結果x_1 に対してまたさいころを投げて偶数の目ならばf_1 を、奇数の目ならばf_2 でうつして、出た結果をx_2 とします。これを繰り返したときの、n 回後の位置をx_n とします。このx_n はn を大きくしていくと＋∞に飛んでいったり－∞に飛んでいったりしますが、そのうち、＋∞に飛んでいく確率（正確には、x_0 から出発して、さいころを無限回ふるときの、＋∞に飛んでいく割合）を$S(x_0)$ とおきます。$S(x)$ は実直線上の関数になりますが、関数$S(x)$ のグラフは、図10のようになります。関数$S(x)$ は（1）実直線全体で連続で、（2）カントールの三進集合という細いフラクタル集合の上だけで変化し、（3）単調に増加します。また、$S(x)$ のグラフである階段の２つの段の間には、必ず無限個の段があります。こんな階段は人間には登れず悪魔しか登れない、ということで関数$S(x)$（を［0, 1］に制限したもの）は「**悪魔の階段**」と呼ばれています。

上の話で$f_1(x) = 2x, f_2(x) = 2x - 1$ とし、$f_1(x)$ を選択する確率をp, $f_2(x)$ を選択する確率を$1 - p$（ただし$0 < p < 1$）として、同じように、初期値x_0 に対して、x_n がn を大きくするにつれて＋∞に飛んでいく確率を$L_p(x_0)$ とかくと、$L_p(x)$ のグラフは、図11のようになります。関数L_p を［0, 1］に制限したもの（ただし$p \neq 1/2$）は**ルベーグの特異関数**と呼ばれていて、［0, 1］上で連続で狭義単調増加（つまり$a < b$ ならば$L_p(a) < L_p(b)$）ですがほとんど全ての点で微分が０になります。

$L_p(x)$ はp に関して微分できることが知られていて、$L_p(x)$ の$p = 1/2$ での微分をx の関数とみたものの1/2 倍を $T(x)$ とおくと、そのグラフは図12のようになります。関数 $T(x)$ は連続ですが０と１の間の任意の数で微分できません。関数 $T(x)$（を［0, 1］に制限したもの）は**高木関数**と呼ばれています。

悪魔の階段、ルベーグの特異関数、高木関数のグラフは、いずれも自己相似性を持つフラクタル図形です。高木関数のグラフは雲の断面の輪郭に似ています。

同じようなことを複素数平面上でもやってみます。関数が多項式のときは、複素数まで話を拡げた方が解析しやすくなります。$f_1(z)$, $f_2(z)$ をそれぞれある多項式関数とします。複素数初期値z_0 をとり、さいころを振って偶数の目が出たらf_1 でz_0 を動かす、奇数の目ならばf_2 でz_0 を動かします。その結果z_1 に対してまたさいころを投げて……とやって、n 回後の位置z_n が、n を大きくするにつれて原点からの距離が無限に飛んでいく確率を $D(z_0)$ とおくと、複素数平面上の関数 $D(z)$ のグラフは、図13のようになります。関数 $D(z)$ は、複素数平面全体で連続ですが、図14のようなある細いフラクタル集合の上だけで変化し、かつ、ある種の単調性を持ちます。図13をひっくり返したものが図15です。図13のような場合の関数 $D(z)$ は「**悪魔のコロシアム**」と呼ばれます。それをひっくり返した図15の関数は「**フラクタルウエディングケーキ**」と呼ばれます。**高木関数の複素数平面上版**も考えることができて、図16はそのグラフです。これらのような、平面全体で連続だけれども細いフラクタル集合の上だけで変化する複雑な関数たちが、非常に豊富にあります。上のランダムな多項式漸化式の理論は、生物の個体数の増減などのありとあらゆる自然現象の記述に役立つ可能性があります。また、それ自体が純粋数学として面白く、（複素数上の）微分積分学、確率論、幾何学などに関係しています。

フラクタル図形が数学を含む自然科学全体の大きな概念に成長したことに関して感じられることは、新しい感性と感受性がいつ・どこでも大事だということです。皆さんもどうぞご自身の感性を大切になさってください。そして、新しい「何か」を見つけてみられてはいかがでしょうか。

［角　大輝］

図1

図2

図3

図4

図6

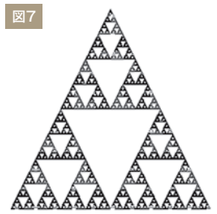
図7


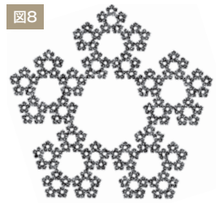
図8


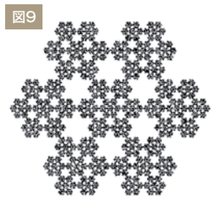
図9


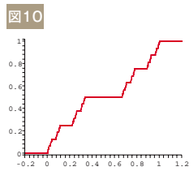
図10


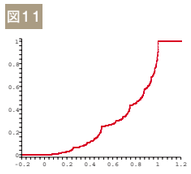
図11


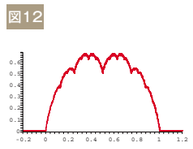
図12


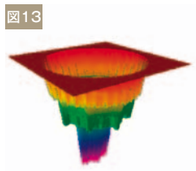
図13


図14

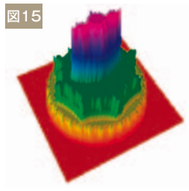
図15


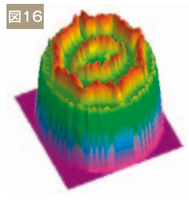
図16


図3：カリフラワー
図5：ロマネスコ
図7：シルピンスキーガスケット
図8：Pentakun
図9：雪片集合
図10：悪魔の階段
図11：ルベーグの特異関数
図12：高木関数
図13：悪魔のコロシアム
図15：フラクタルウエディングケーキ
図16：高木関数の複素平面上版